

Mathematische Analyse von
elektrisch *kleinen* Loop-Antennen
für 315 und 434 MHz und deren
Darstellung in 2D und 3D
Diagrammen

Dieter Brozio

Dieter.Brozio@huf-group.com

Dipl.-Ing. Dieter Brozio

Phone: +49 (0) 2051 272-6381

Huf Hülsbeck und Fürst GmbH & Co. KG, Velbert

DF5EN@dark.de

Dokumentation mit L^AT_EX / Bibliographie mit B_IB_TE_X

27. Januar 2016

Abstract:

This article examines with simple mathematical methods the radiation resistor, loss resistor, inductance and quality factor etc. of electrical small UHF loop antennae based only on mechanical dimensions and material constants. It identifies the point of the maximum of the energy efficiency by calculating the derivative of 1st prime. With this achieved best-of constellation the appropriate matching network for the antenna will be determined. Objective quality criteria are used to judge all mathematical terms. Also a 'propagation of uncertainty' has been done. If possible the article gives an overview about the calculated results with 2D and 3D figures.

Copyright © 2016 Dieter Brozio

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Allgemeines	2
2.1. Beschreibung	2
2.2. Ersatzschaltbild	3
2.3. Feldwellenwiderstand	3
3. Toleranz und Fehlergrenzen	5
3.1. Anmerkungen	5
3.2. Festlegungen	5
3.3. Definition	6
4. Effektive Innenfläche	8
5. Strahlungswiderstand	11
5.1. Berechnung	11
5.2. Stabilität	12
5.3. Toleranz	13
6. Verlustwiderstand	15
6.1. Berechnung	15
6.2. Stabilität	16
7. Antenneneffektivität	19
7.1. Visuelle Beurteilung	19
7.2. Verlust- zu Strahlungsverhältnis	23
7.3. Wirkungsgrad	27
7.4. Stabilität	29
7.5. Maximaler Wirkungsgrad	32
7.5.1. Erste Ableitung	32
7.5.2. Extrempunkt Maximum	32
8. Antenneninduktivität	34
8.1. Anteil der effektiven Loop-Fläche	34
8.2. Anteil der Drahtlänge	37

Inhaltsverzeichnis

8.3. Gesamtinduktivität	40
9. Antennengütefaktor	43
9.1. Güte mit und ohne Anpassung	43
9.2. Berechnung	43
10. Antennenanpassung	47
10.1. Impedanzgleichung	47
10.2. Kontrolle der Anpassung	48
10.3. Umstellung der Impedanzgleichung	50
11. Antennenresonanz	51
12. Zusammenfassung	55
12.1. Maximaler Wirkungsgrad	55
12.2. Fehlergrenzen bei maximalem Wirkungsgrad	55
12.3. Fehlergrenzen bei nicht-max. Wirkungsgrad	56
12.4. Relative Fehlergrenzen im Überblick	56
A. Anhang	IV
A.1. Tabellen	IV
A.2. Verwendete Gleichungen	V
A.3. GNU Free Documentation License	IX
Abkürzungen und Keywords	X
Literaturverzeichnis	XI

1. Einleitung

Nach einer Sammlung aus Ideen und Berechnungen der Antentop-Reihe [Gri15] wurde hier der Gedanke aufgegriffen Loop-Antennen eingehender zu untersuchen. Dabei spielten insbesondere die Berechnungen von Prof. Natalia Nikolova [Nik14, S. 3,13,15,16] eine entscheidende Rolle, deren Berechnungsergebnisse aufzugreifen und anhand der bekannten und bereits verwendeten Antennen anzuwenden. Auch die alten Berechnungen aus den 80er Jahren von Gerd Janzen in [Jan86, Kap. 7] dienten der Motivation. Ebenso ergänzten auch Teile der Berechnungen einer älteren Chipcon Application-Note [EJ03, S. 2], wie z.B. die Definition des Wirkungsgrades η bei Loop-Antennen, diese Dokumentation.

Aus vergangenen Serienprojekten lagen bereits viele praktische Erfahrungen über diese Antennenform, wie z.B. [BS12] vor, jedoch war während laufender Kundenentwicklungsprojekte nie ausreichend Zeit vorhanden sich dem Thema auf theoretischer Ebene zu nähern. Andererseits sollten diese in Bezug auf die Wellenlänge kleinen Loop-Antennen im Vergleich zu den Full-Size Loops von KW-Transceivern nach [LF79] ebenso möglichst optimal ausgelegt werden.

Loop-Antennen, wie sie hier berechnet werden, werden in den verschiedensten HF-Systemen eingesetzt. Eine Loop-Antenne mit dem Ersatzschaltbild einer Serieninduktivität und zwei hintereinander geschalteten Strahlungs- und Verlustwiderständen wurde bereits auch in anderen eigenen Berechnungen wie z.B. in [Bro15] verwendet. Diese Berechnung hier setzt nun da auf, wo in vielen anderen praktischen Arbeiten aufgrund des Zeit- und Kostendrucks nicht nach dem Hintergrund gefragt werden kann.

Auch neuere Erfindungen mit erweiterten Technologien wie [BK14] verwenden ebenso dieselben Ersatzschaltbilder, wie sie hier berechnet werden.

Als gute Grundlagenliteratur seien hier die Bände [MG92a],[MG92b],[MG92c] empfohlen. Ebenso stellt *Der Rothammel* [RK13, Kap. 14ff] einen unverzichtbaren Klassiker auf dem Gebiet dieser Antennenform dar, der der Loop-Antenne im genannten Kapitel einen breiten Raum eröffnet.

2. Allgemeines

2.1. Beschreibung

Die **ideale**¹ Loop-Antenne besteht aus einer kreisförmigen runden Schleife. Ein umspannender Leiter bestimmt dabei den eigentlichen sichtbaren Antennenteil. Die vom Leiter eingeschlossene Fläche ist dabei die effektiv wirksame strahlungsbestimmende Antennenfläche. Da hier der Außenradius r_a vorgegeben und somit konstant ist, bestimmt die Größe der Leiterbreite w somit den Innenradius r_i . In Abb. 2.1 ist der prinzipielle Aufbau einer solchen Antenne gezeichnet.

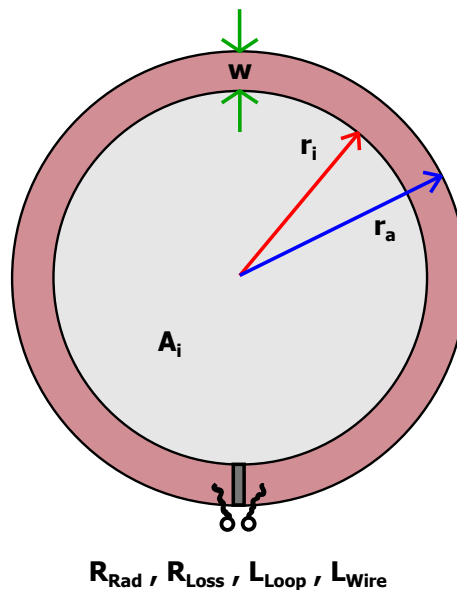


Abbildung 2.1.: Loop Antenne mit Innen- und Außenradius

Je größer die Leiterbreite w , desto kleiner wird somit der Innenradius r_i und die sich daraus ergebende strahlungsbestimmende Innenfläche A_i . Wird w immer größer und größer, so strebt die Innenfläche A_i gegen Null und die Antenne wird unwirksam. Wird w immer

¹Es wird hier nicht die reale Loop-Antenne beschrieben. Demzufolge wird auf die Wirkung zuführender Leitungen verzichtet.

kleiner und kleiner, so strebt r_i gegen r_a und die Innenfläche erreicht ihr Maximum bei $r_i = r_a$.

Diesen Zusammenhang zu verstehen ist wichtig, da sich daraus die beiden Größen des Strahlungs- und Verlustwiderstandes ergeben. Dieses **ESB** wird in Kap. 2.2 beschrieben.

2.2. Ersatzschaltbild

Für einen optimalen Wirkungsgrad der Antenne sollte der Verlustwiderstand möglichst minimiert werden. Der Verlustwiderstand der Loop-Antenne sinkt, je breiter der Leiter w wird und er steigt, je schmaler diese Breite w wird. Dies geschieht ebenso beim Fußpunkt- bzw. Strahlungswiderstand. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Widerständen ist jedoch, dass dies hier nach einem anderen Kurvenverlauf geschieht.

Abb. 2.2 zeigt das **ESB**. Die Loop-Antenne besteht aus folgenden Elementen:

- Strahlungswiderstand R_{Rad}
- Strahlungswiderstand R_{Loss}
- Induktivität L_A der effektiv wirksamen Antennenfläche und
- intrinsische Eigeninduktivität L_i des gestreckten Leiters

Zur Darstellung der Schwingkreisresonanz und der Anpassung an die gewünschte Impedanz \bar{Z} wurden hier der Vollständigkeit halber noch die beiden Kondensatoren C_1 und C_2 eingezeichnet, die jedoch nicht Teil der Antenne und somit auch deren korrekte Berechnung nicht Teil dieser Ausarbeitung ist.

Es stellt sich hier die Frage, ob es eine optimale Konstellation gibt, bei der der Verlustwiderstand noch gerade eben tragbar klein und der sehr geringe Strahlungswiderstand möglichst groß ist?

2.3. Feldwellenwiderstand

Mit der magnetische Feldkonstante μ_0 von $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ und der elektrischen Feldkonstante ϵ_0 von $9.85418787110 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (2.1)$$

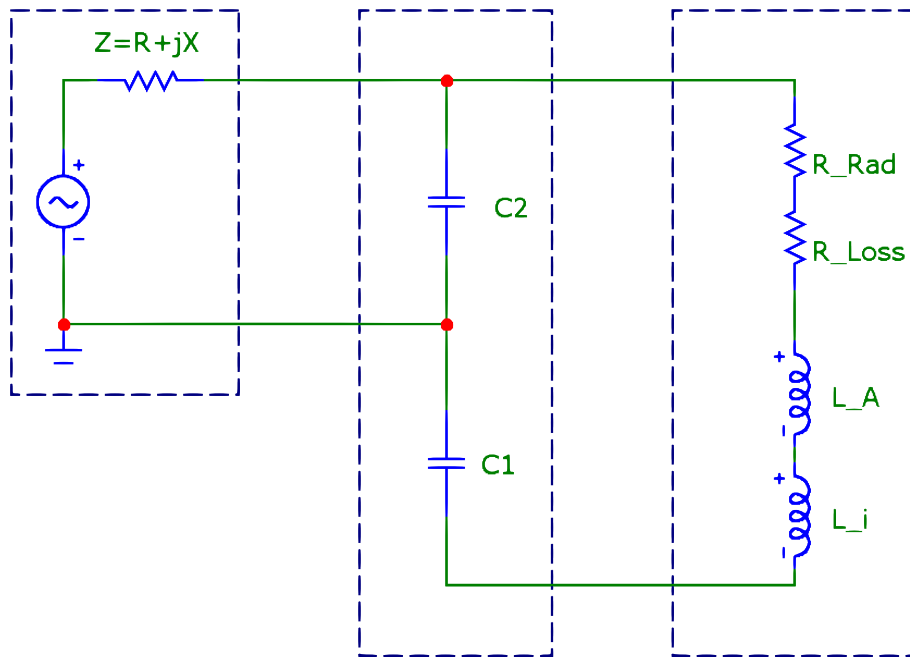


Abbildung 2.2.: ESB bestehend Generator, Matching und Antennenelementen

Daraus ergibt sich ein Widerstand Z_0 von $\approx 376.730313461\Omega$. Manchmal wird dieser Wert auch mit '120 $\pi\Omega$ ' angegeben, weil man sich diese Kombination besser merken kann.

Der Feldwellenwiderstand Z_0 ist an dieser Stelle lediglich die Erklärung einer Konstante, die für weitere Berechnungen verwendet wird. Ansonsten hat er für diese Ausarbeitung keine weitere Bedeutung.

3. Toleranz und Fehlergrenzen

3.1. Anmerkungen

Dieses Kapitel erläutert die Toleranz und die Fehlergrenzen, welche in den folgenden Kapiteln für die jeweiligen Berechnungen verwendet werden. Eine allgemeine Beschreibung ist unter [\[wik16\]](#) zu finden.

Weiterhin sind die in dieser Dokumentation verwendeten **eigentlich viel zu großen Werte** lediglich exemplarisch gewählt worden. Es hätten auch beliebig andere, allerdings sinnvolle¹ Zahlengrößen werden können. Die Wahl dieser Zahlengrößen für die folgenden Diagramme erschien jedoch hinsichtlich einer guten optischen Darstellung als sinnvoll, da ALLE Diagramme durchgängig mit DENSELBEN Fehlergrenzen für w und r_a berechnet werden konnten.

3.2. Festlegungen

Es werden hier die Fehlergrenzen bestimmt, d.h. es ist davon auszugehen, dass bei der Leiterbreite w und dem Außenradius r_a absolute Fehler auftreten, die dann in das berechnete Ergebnis eingehen und sich somit fortpflanzen.

Im folgenden werden zu jeder Rechengröße drei Diagramme gezeigt:

1. der Basiswert und die +/- Einzeltoleranzen von jeweils w und r_a
2. der Basiswert und die +/- Gesamttoleranzen von w und r_a
3. die +/- relativen Gesamttoleranzen in Prozent bezogen auf den Basiswert

Diese Anordnung ist für folgende Dinge geeignet:

- > 1. Es ist erkennbar, ob die Größe eher nach w oder nach r_a toleranzbehaftet ist
- > 2. Die Gesamttoleranz ist die quasi "offizielle" Größenangabe

¹Die Fehlerrechnung kontrolliert nicht die eingesetzten Werte! Messwerte von Zentimetern mit Fehlergrenzen von Metern liefern somit keine sinnvollen Ergebnisse.

- > 2. Hier erkennt man den Gesamtkurvenverlauf am besten
- > 3. Qualitativ Abweichungen sind gut erkennbar
- > 3. Quantitative Abweichungen können abgelesen werden
- > 3. Unterschiedliche phys. Größen können miteinander verglichen werden

Um diese Darstellung optisch zu erreichen wurden folgende Parameter festgelegt.

- Der Toleranzwert für w wurde beliebig definiert
- Der Toleranzwert für r_a wurde beliebig definiert.
- Die Kurven abhängig von w und r_a sollten sich aus optischen Gründen nicht überlappen
- Die Toleranz für r_a sollte höher sein, als die für w

Diese Parameter sind textschnitt systemspezifisch. Sie dienen nur einer optisch ansprechenden Darstellung der Kurven in diesem Dokument. In der Praxis müssen hier die vom z.B. Leiterplattenhersteller oder sonstigen Lieferanten angegebenen Toleranzgrenzen für w und r_a eingesetzt werden. Die daraus sich errechnenden Diagramme würden jedoch nicht wesentlich anders aussehen.

3.3. Definition

Fehlergrenzen sind vereinbarte oder garantierte Höchstwerte für positive oder negative Abweichungen vom *richtigen* und somit nicht fehlerbehafteten Wert.

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 + \dots \quad (3.1)$$

Beispiel für die Induktivität L_{Loop} : Für die Rechengröße der Induktivität L_{Loop} mit den fehlerbehafteten Werten w (Leiterbreite) und r_a (Außenradius) wird nun die Fehlergrenze wie folgt berechnet:

$$\Delta L_{Loop} = \left| \frac{\partial L_{Loop}}{\partial w} \right| \cdot \Delta w + \left| \frac{\partial L_{Loop}}{\partial r_a} \right| \cdot \Delta r_a \quad (3.2)$$

In den Diagrammen wurde nun ΔL_{Loop} auf L_{Loop} aufaddiert und subtrahiert:

$$L_{LoopOberer-Grenze} = L_{Loop} + \Delta L_{Loop} \quad (3.3)$$

$$L_{LoopUntere-Grenze} = L_{Loop} - \Delta L_{Loop} \quad (3.4)$$

Diese Kurven werden nun in den Diagrammen dargestellt:

- L_{Loop} als Größe ohne Toleranzgrenze
- $L_{LoopObere-Grenze}$ als Größe mit oberer Toleranzgrenze
- $L_{LoopUntere-Grenze}$ als die Größe mit unterer Toleranzgrenze

Dementsprechend müssen die gleichen Differentiation und die gleichen Diagramme für alle weiteren Rechengrößen welche funktional abhängig von w und r_a sind auch genauso berechnet werden.

4. Effektive Innenfläche

Die effektive Innenfläche und somit der zur Abstrahlung wirksame Anteil der Antennenfläche ergibt sich aus dem unbekanntem Innenradius r_i . Dieser kann jedoch leicht durch den bekannten Außenradius r_a abzüglich der Leiterbreite w berechnet werden.

Entsprechend Abb. 2.1 auf Seite 2 beschreibt sich daraus die Innenfläche A_i wie folgt:

$$A_i = \pi r_i^2 = \pi (r_a - w)^2 \quad (4.1)$$

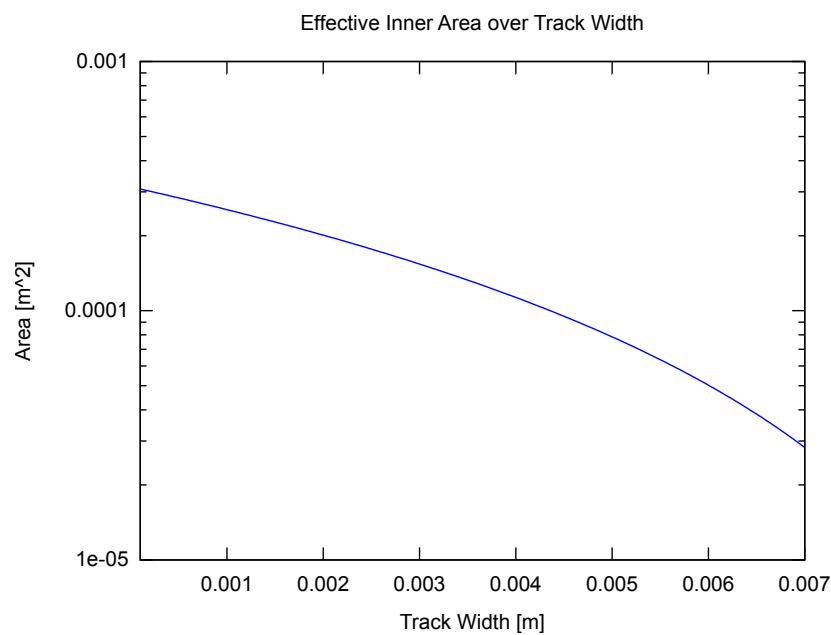


Abbildung 4.1.: Antenneninnenfläche nach Gl. 4.1

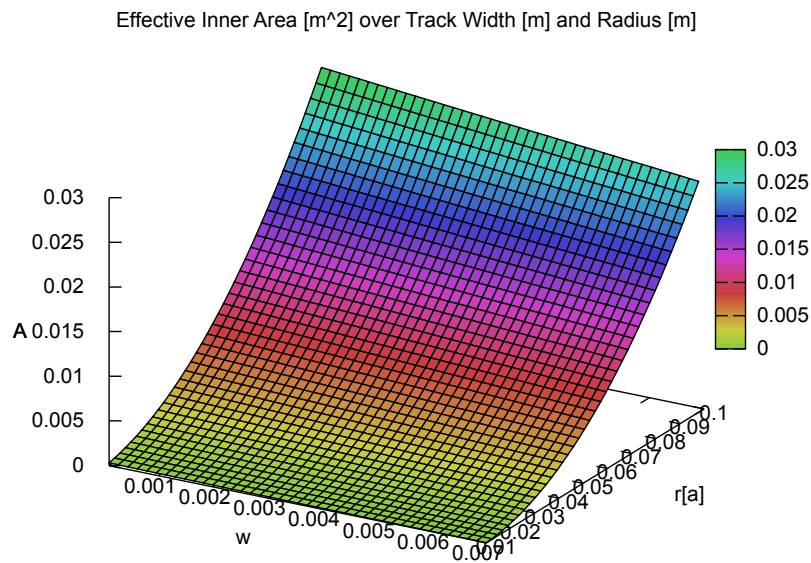


Abbildung 4.2.: Antenneninnenfläche nach Gl. 4.1 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

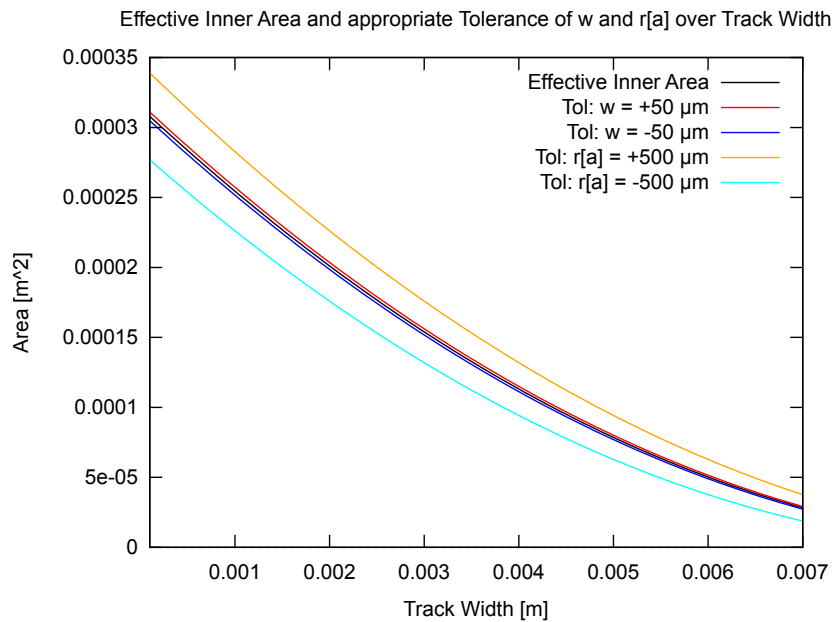


Abbildung 4.3.: Antenneninnenfläche Einzeltoleranzen über w von 0.1 bis 7 mm

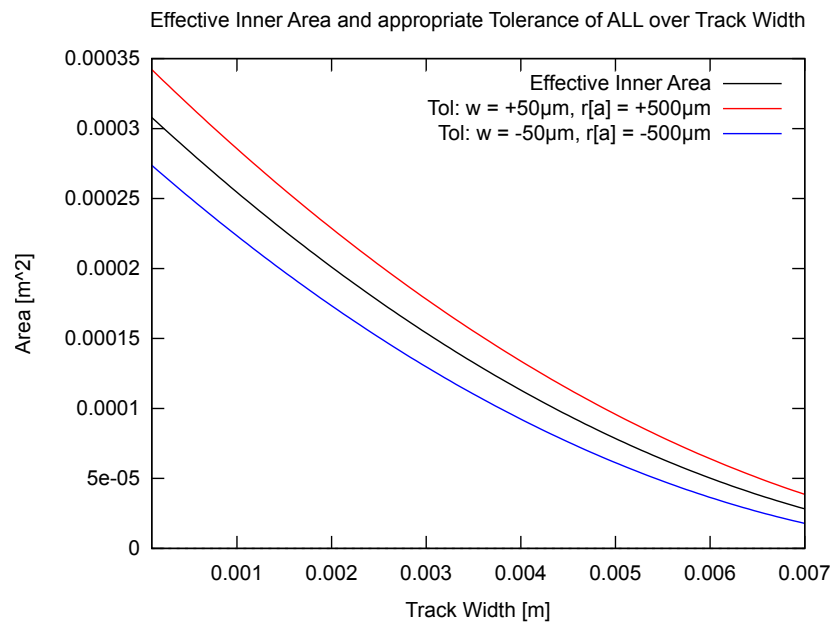


Abbildung 4.4.: Antenneninnenfläche Gesamttoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

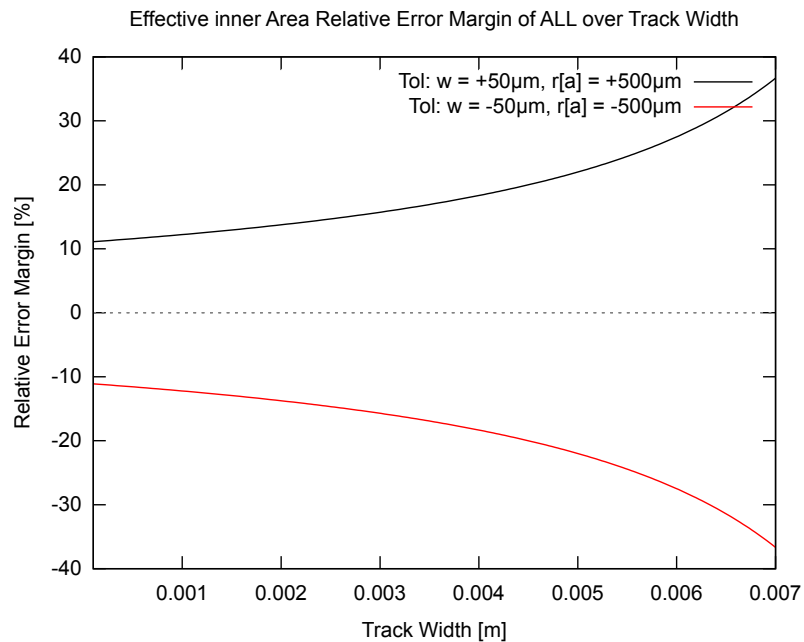


Abbildung 4.5.: Antenneninnenfläche relative Fehlergrenze über w von 0.1 bis 7 mm

5. Strahlungswiderstand

5.1. Berechnung

Nach [Nik14, eqn. 12.10] errechnet sich der Strahlungswiderstand einer *kleinen* Loop-Antenne zu Gleichung 5.2.

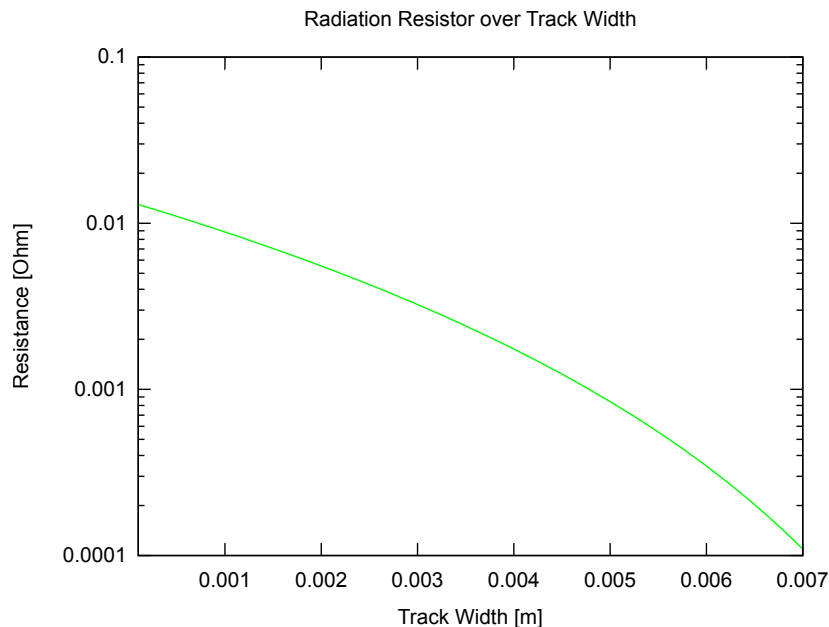


Abbildung 5.1.: Strahlungswiderstand linearer Verlauf nach Gl. 5.2

Wobei der relative Begriff *klein* hier mathematisch zu $C < 0.1 \cdot \lambda$ definiert¹ ist, d.h. der Umfang C kleiner als ein Zehntel Wellenlänge sein muss. Entsprechend der höchsten verwendeten Frequenz von 434 MHz ergibt sich somit der **maximale Umfang einer Loop-Antenne zu kleiner 7 cm.**

¹Die Definition einer *kleinen* Loop-Antenne ist in der Literatur unterschiedlich zwischen $1/10 \cdot \lambda$ und $1/2 \cdot \lambda$ definiert. Aus diesem Grund wird hier mit der *strengeren* Definition von $1/10 \cdot \lambda$ gerechnet.

$$R_{Rad} = Z_0 \frac{8}{3} \pi^3 \left(\frac{f}{c_0} \right)^4 A_i^2 = Z_0 \frac{8}{3} \pi^3 \left(\frac{f}{c_0} \right)^4 \pi^2 (r_a - w)^4 \quad (5.1)$$

$$R_{Rad} = Z_0 \frac{8}{3} \pi^5 \left(\frac{f}{c_0} \right)^4 (r_a - w)^4 = k_1 (r_a - w)^4 \quad (5.2)$$

$$R_{Rad} = f(w, r_a) = k_1 (r_a - w)^4 \quad (5.3)$$

5.2. Stabilität

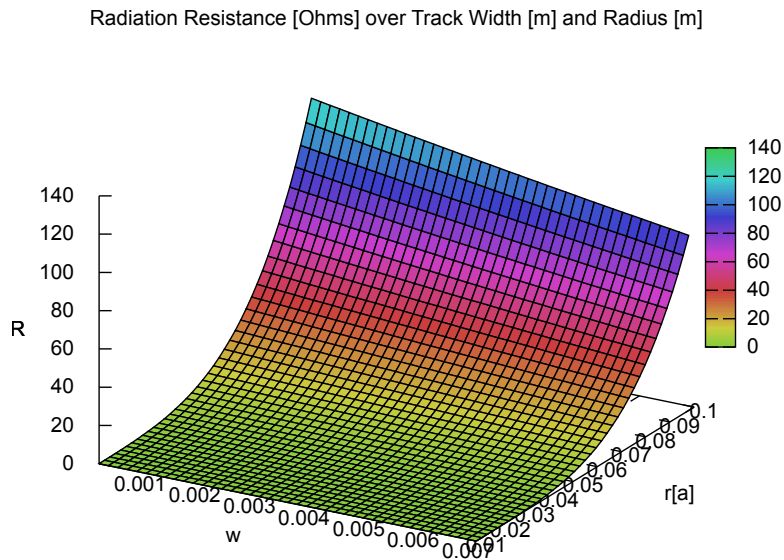


Abbildung 5.2.: Strahlungswiderstand nach Gl. 5.2 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

Die Betrachtung von 5.2 zeigt keine größeren Auffälligkeiten oder Besonderheiten. Der Strahlungswiderstand ist in einem großen Bereich stabil und lässt sich einfach beherrschen. Es zeigt sich aber, dass man bei kleinen Loop-Antennen keinerlei Chance auf Aussicht eines größeren Strahlungswiderstandes hat. Dieser ist einzig und allein größeren Antennen mit einem größeren Radius vorbehalten.

5.3. Toleranz

Bei den Toleranzen zeigen sich keine signifikanten Auffälligkeiten.

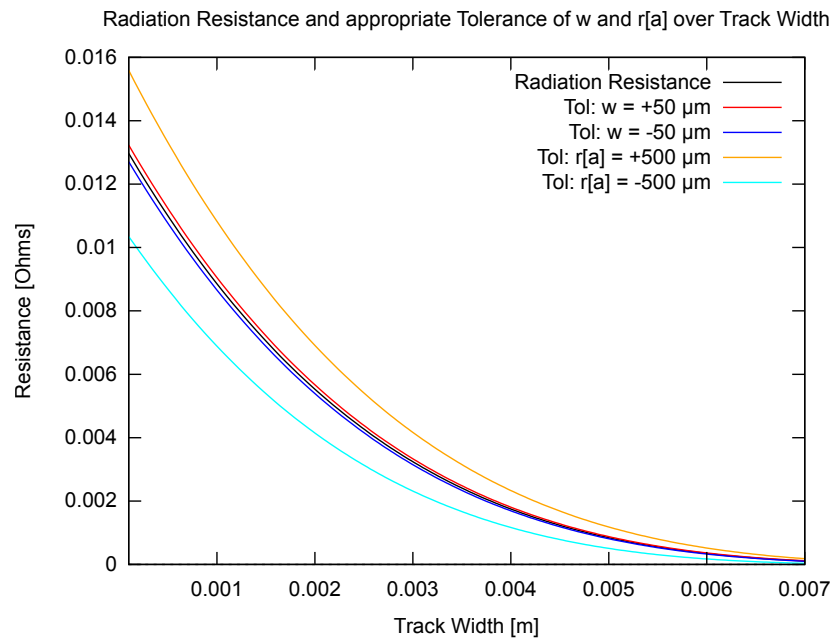
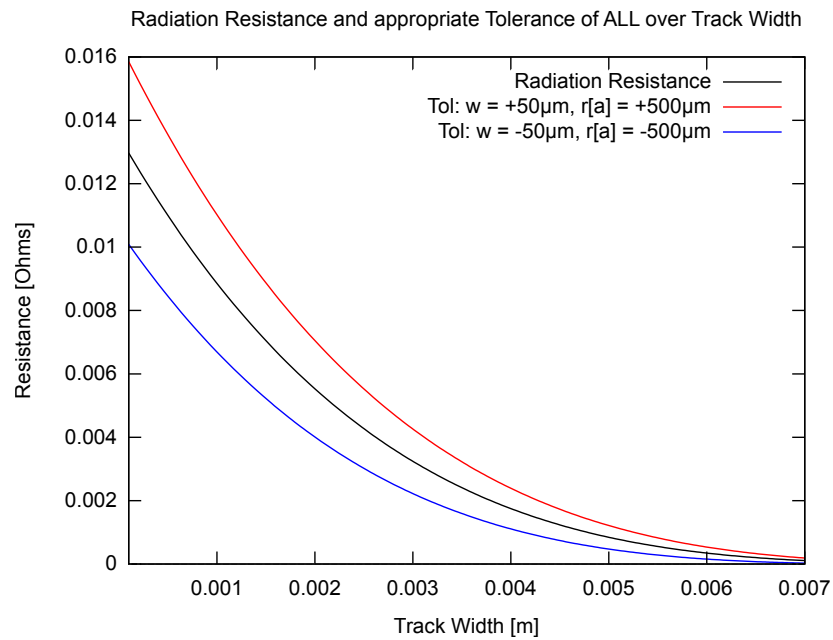
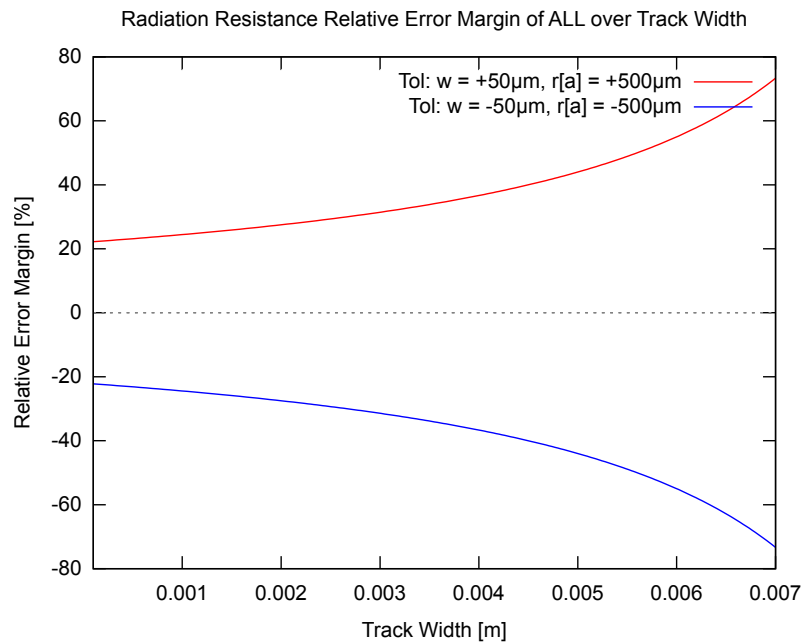


Abbildung 5.3.: Strahlungswiderstand und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

Abbildung 5.4.: Strahlungswiderstand und Gesamtteranz über w von 0.1 bis 7 mmAbbildung 5.5.: Relative Fehlergrenze Strahlungswiderstand über w von 0.1 bis 7 mm

6. Verlustwiderstand

6.1. Berechnung

Umfang P (Perimeter) der Loop:

$$P_a = 2\pi r_a \quad (6.1)$$

$$P_i = 2\pi r_i = 2\pi (r_a - w) \quad (6.2)$$

Mittlerer Umfang:

$$\bar{P} = 2\pi \frac{r_a + r_i}{2} = 2\pi \frac{r_a + r_a - w}{2} = \pi (2r_a - w) \quad (6.3)$$

Die Berechnung des Widerstands aufgrund des Umfangs sieht nach [Nik14, eqn. 12.32] somit wie folgt aus:

$$R_{Loss} = \frac{\bar{P}}{2w} \sqrt{\pi f \frac{\mu_0}{\sigma}} = \pi \frac{2r_a - w}{2w} \sqrt{\pi f \frac{\mu_0}{\sigma}} = \frac{2r_a - w}{2w} \sqrt{\pi^3 f \frac{\mu_0}{\sigma}} \quad (6.4)$$

Wobei hier der Ansatz gewählt wurde, dass der gemittelte Umfang zwischen Außen- und Innenradius verwendet wird. Die Begründung dazu ist, dass in diesem Dokument in den Diagrammen eine für praktische Verhältnisse RIESIGE Leiterbreite berechnet wird und sich somit ein anderer Wert ergibt, als wenn man entweder nur den Außen- oder nur den Innenradius verwenden würde. Der Einfachheit halber wurde hier das arithmetische Mittel gewählt.

$$\boxed{R_{Loss} = \left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right] \sqrt{\pi^3 f \frac{\mu_0}{\sigma}} = \left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right] k_2} \quad (6.5)$$

$$R_{Loss} = f(w, r_a) = k_2 \left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right] \quad (6.6)$$

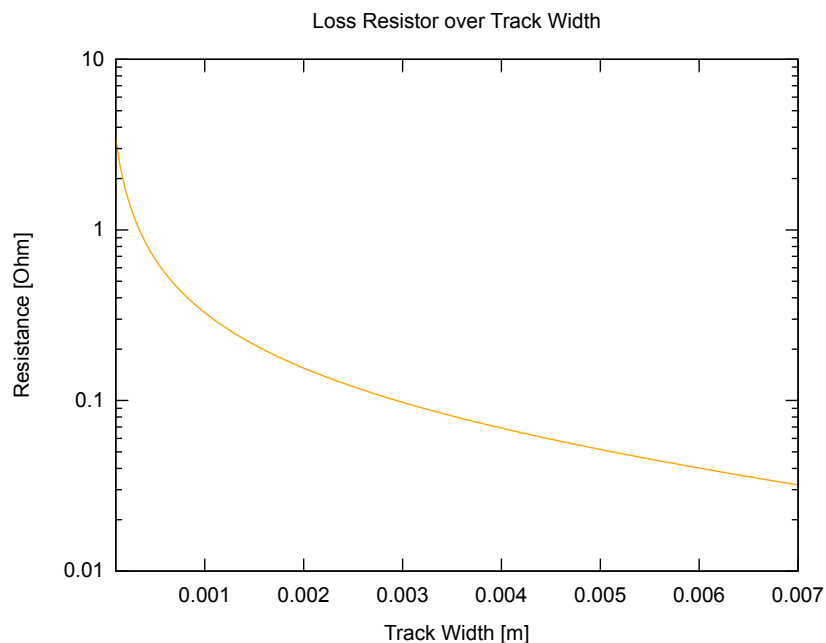


Abbildung 6.1.: Verlustwiderstand logarithmischer Verlauf nach Gl. 6.5

6.2. Stabilität

Die Betrachtung von Abb. 6.2 zeigt eine starke Auffälligkeit: Der Verlustwiderstand steigt unterhalb einer bestimmten Leiterbreite überproportional stark an. Mit zunehmendem Außenradius verschärft sich dieser Effekt sogar noch. Antennen die in diesem Arbeitsbereich betrieben werden sind somit immer schlechter.

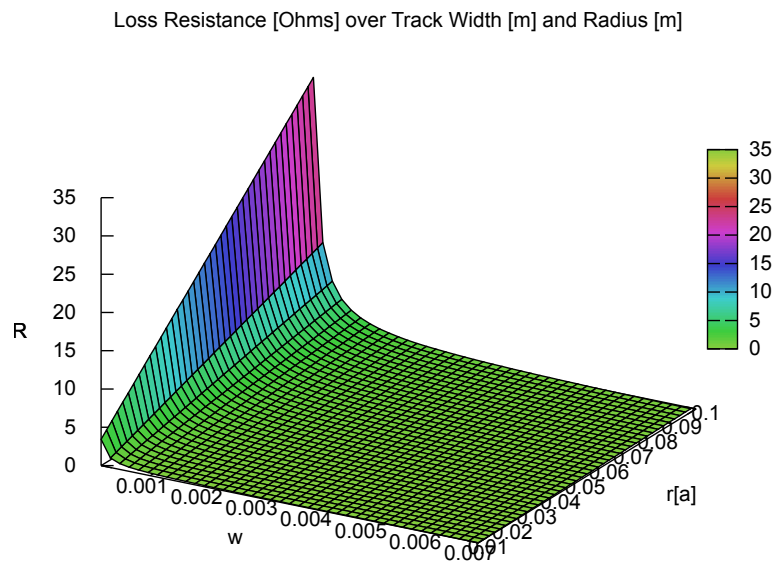


Abbildung 6.2.: Verlustwiderstand nach Gl. 6.6 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Außenradien von 10 bis 100 mm

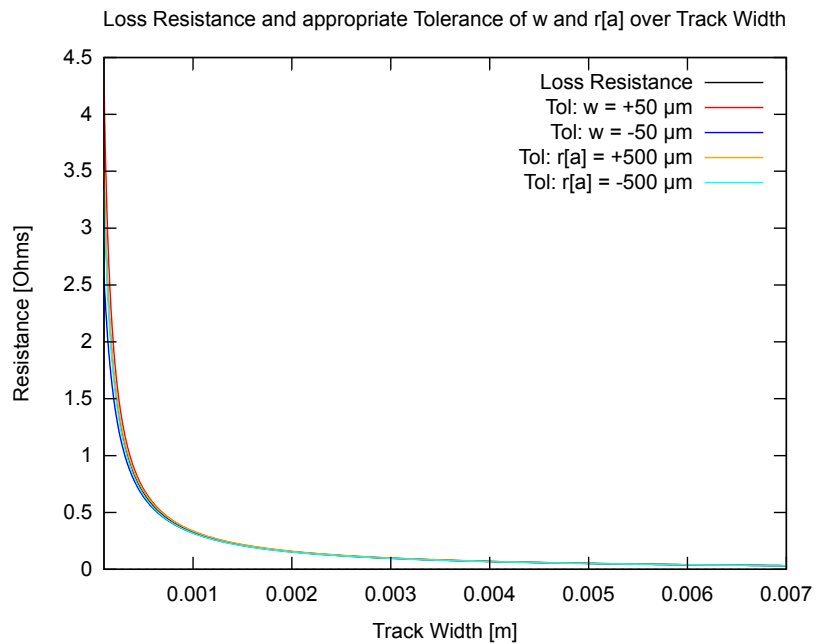


Abbildung 6.3.: Verlustwiderstand und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

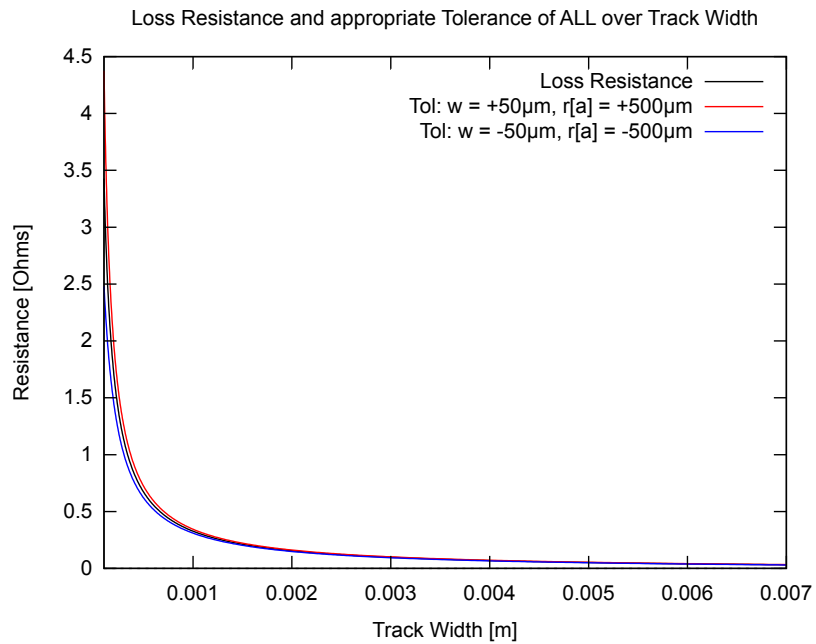


Abbildung 6.4.: Verlustwiderstand und Gesamttoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

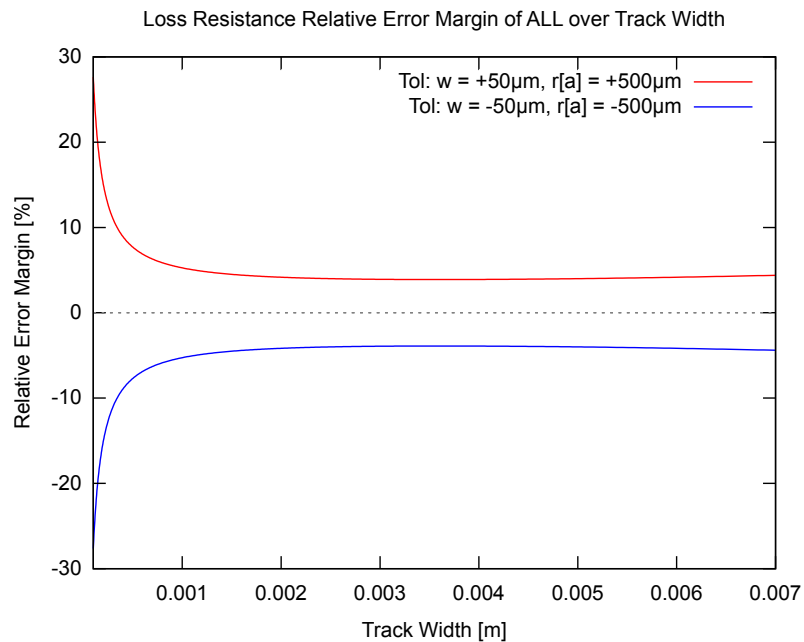


Abbildung 6.5.: Relative Fehlergrenze Verlustwiderstand über w von 0.1 bis 7 mm

7. Antenneneffektivität

Um die Effektivität von Loop-Antennen zu beurteilen gibt es mehrere Verfahren.

- Qualitative Gegenüberstellung von Verlust zu Strahlungswiderstand
- Verhältnis von Verlust- zu Strahlungswiderstand
- Wirkungsgrad

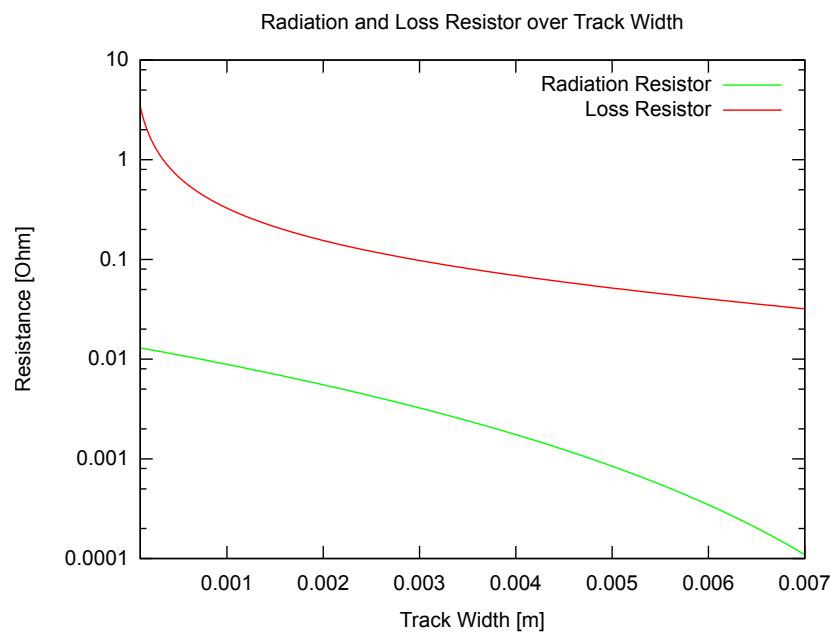


Abbildung 7.1.: Strahlungs- und Verlustwiderstand logarithmischer Verlauf in 2D

7.1. Visuelle Beurteilung

Bei der Betrachtung von Abb. 7.1 fällt auf, dass beim ohnehin kleinen Strahlungswiderstand R_{Rad} mit zunehmender Leiterbreite der Widerstandswert erst recht stark, dann weniger stark zurückgeht. Während hingegen beim ziemlich großen Verlustwiderstand

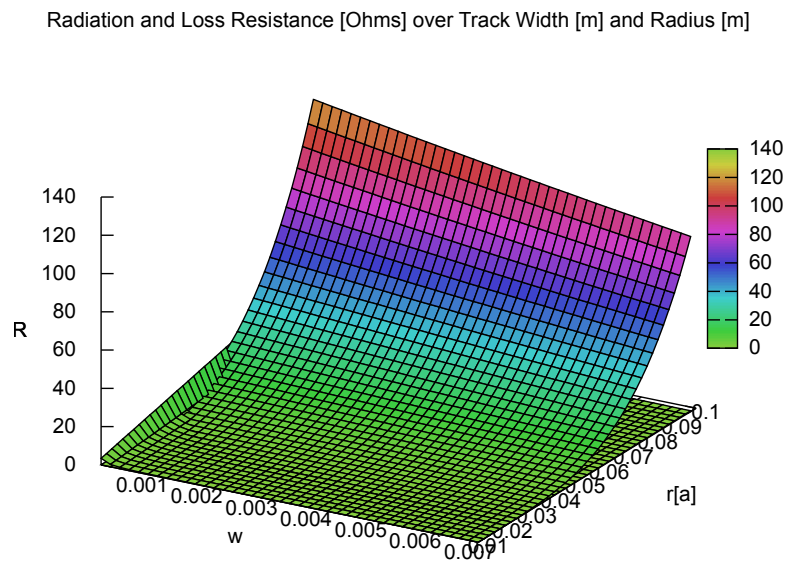


Abbildung 7.2.: Strahlungs- und Verlustwiderstand logarithmischer Verlauf in 3D

R_{Loss} sich dieser bei geringer Leiterbreite sehr stark abschwächt um dann bei zunehmender Breite nur relativ langsam noch zuzunehmen.

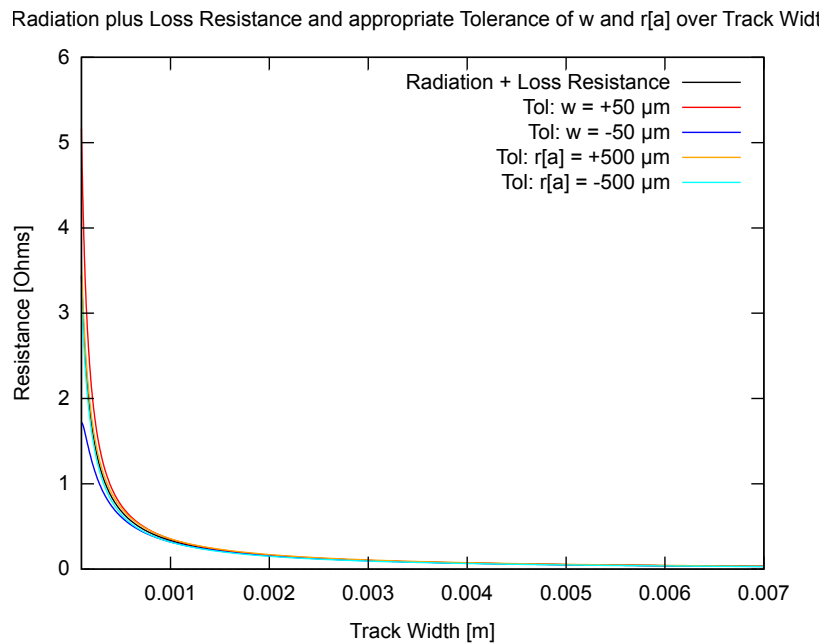


Abbildung 7.3.: Strahlungs- plus Verlustwiderstand und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

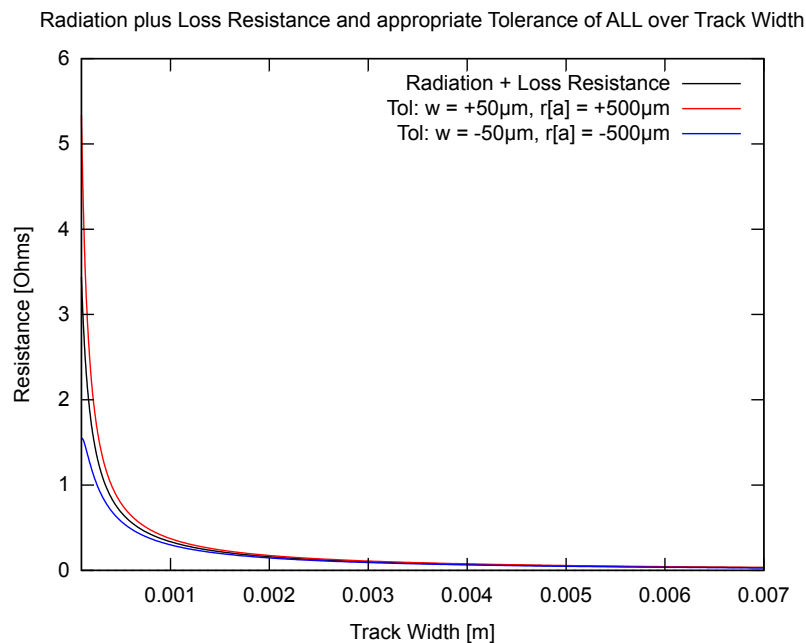


Abbildung 7.4.: Strahlungs- plus Verlustwiderstand und Gesamttoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

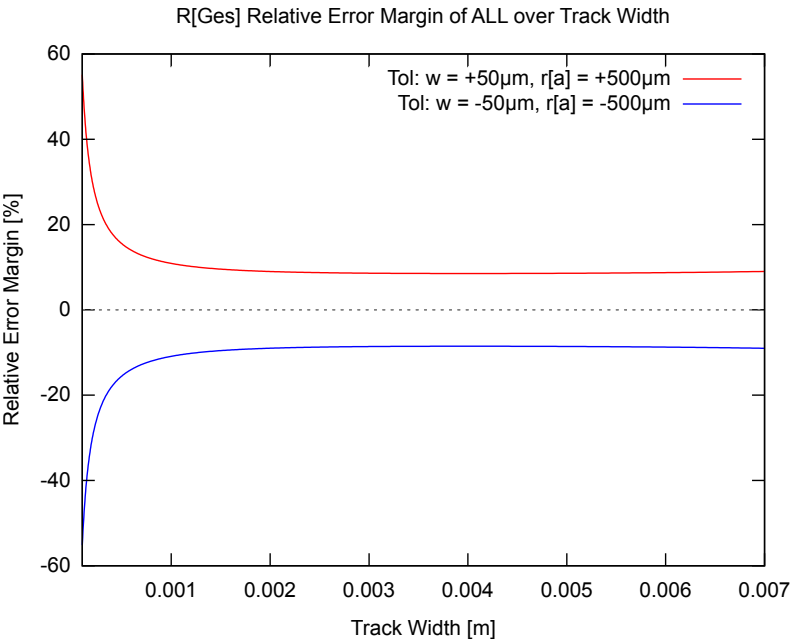


Abbildung 7.5.: Relative Fehlergrenze Strahlungs- plus Verlustwiderstand über w von 0.1 bis 7 mm

7.2. Verlust- zu Strahlungsverhältnis

Die einfachste Form ist die Bestimmung eines Verhältnisses von Strahlungs- zu Verlustwiderstand. Normalerweise würde man den Bruch umgekehrt schreiben, da aber bei kleinen Loop-Antennen die Zahlengrößen sehr klein sind, setzt man zweckmäßigerweise den Verlustwiderstand in den Zähler und den Strahlungswiderstand in den Nenner. Dies hat dann den Vorteil, dass man es nicht mit Zahlen kleiner 1 zu tun, welche dann für das menschliche Auge nicht so einfach zu unterscheiden wären.

$$v = \frac{R_{Loss}}{R_{Rad}} \quad (7.1)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 5.2 auf Seite 12 und 6.5 aus Seite 15 in Gleichung 7.1 ergibt sich nun 7.2

$$v = \frac{\left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right] \sqrt{\pi^3 f \frac{\mu_0}{\sigma}}}{Z_0 \frac{8}{3} \pi^5 \left(\frac{f}{c_0} \right)^4 (r_a - w)^4} \quad (7.2)$$

Exakt dasselbe Ergebnis ergibt sich bei Anwendung der Kurzformen dieser Gleichung, d.h. das Einsetzen von 5.3 und 6.6 in 7.1 ergibt das zahlenmässig identische Ergebnis in Gleichung 7.3.

$$v = \frac{k_2 \left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right]}{k_1 (r_a - w)^4} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2}}{(r_a - w)^4} \quad (7.3)$$

Bei der Betrachtung des Verlust- zu Strahlungsverhältnisses erkennt man in Abbildung 7.6 schon recht gut, dass es anscheinend eine flach ausgeprägte Stelle im Diagramm gibt, bei der das Verhältnis 'Verlust zu Strahlung' schon recht gering ist.

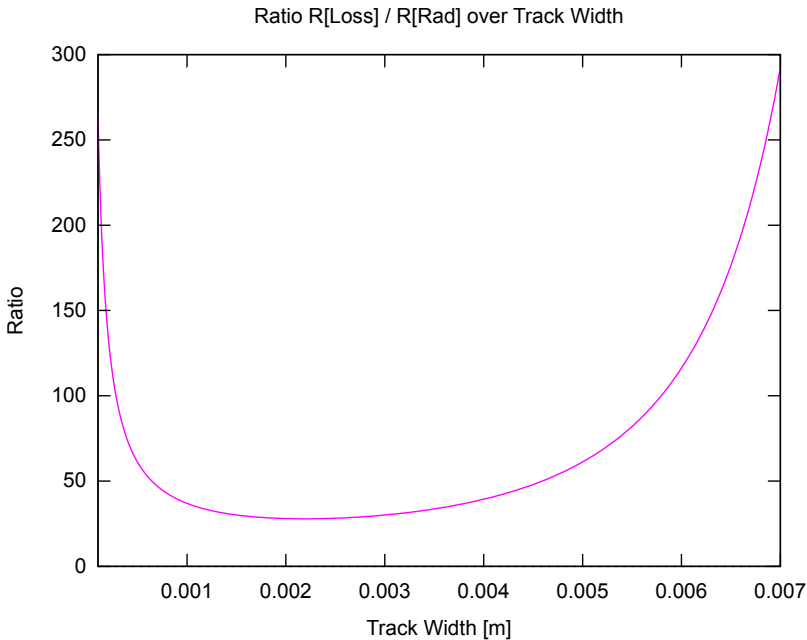


Abbildung 7.6.: Verhältnis Verlust- zu Strahlungswiderstand in 2D

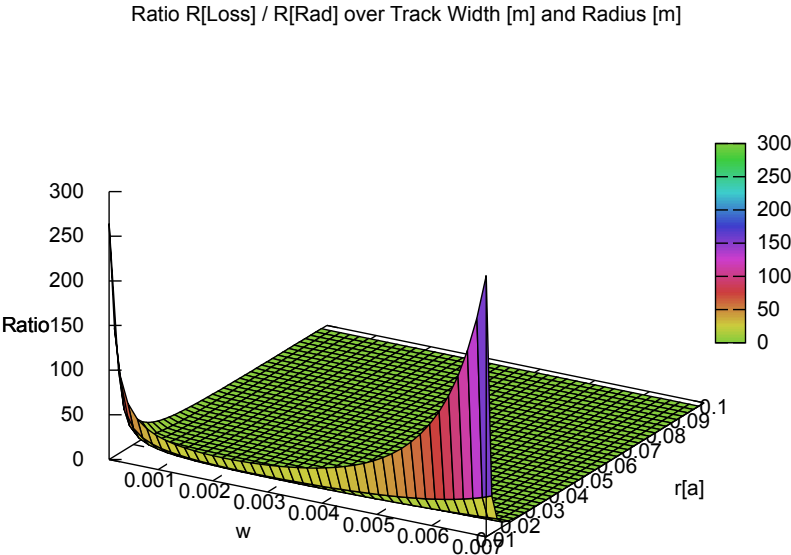
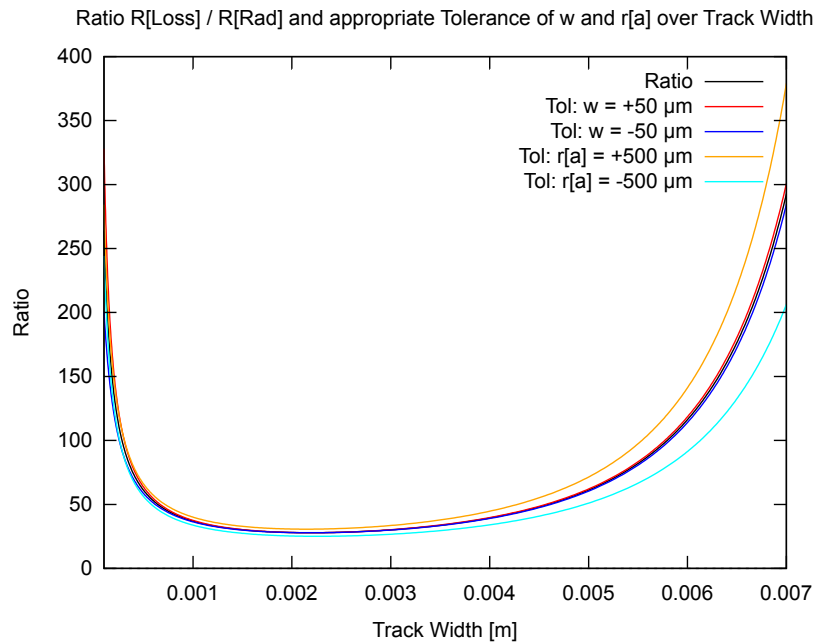
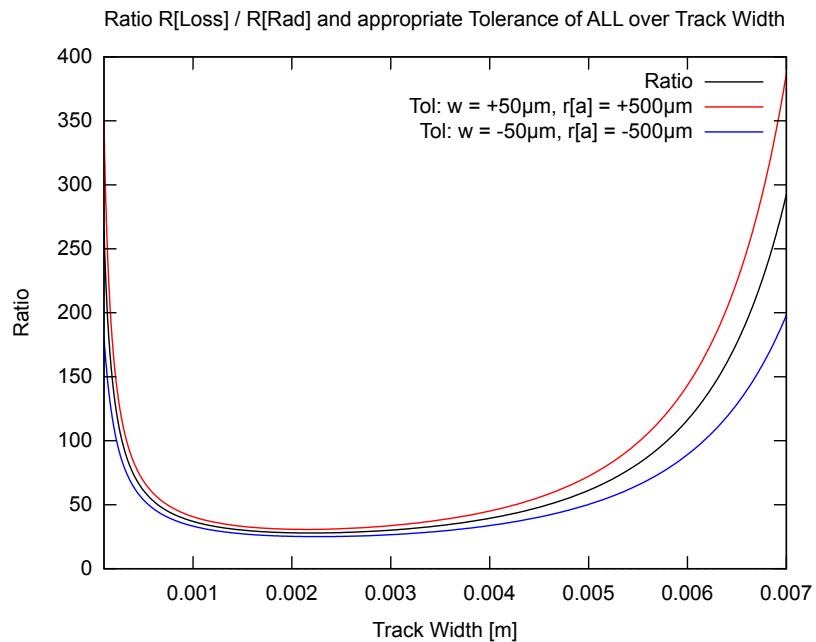


Abbildung 7.7.: Verhältnis Verlust- zu Strahlungswiderstand in 3D

Abbildung 7.8.: Ratio R_{Loss}/R_{Rad} und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mmAbbildung 7.9.: Ratio R_{Loss}/R_{Rad} und Gesamttoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

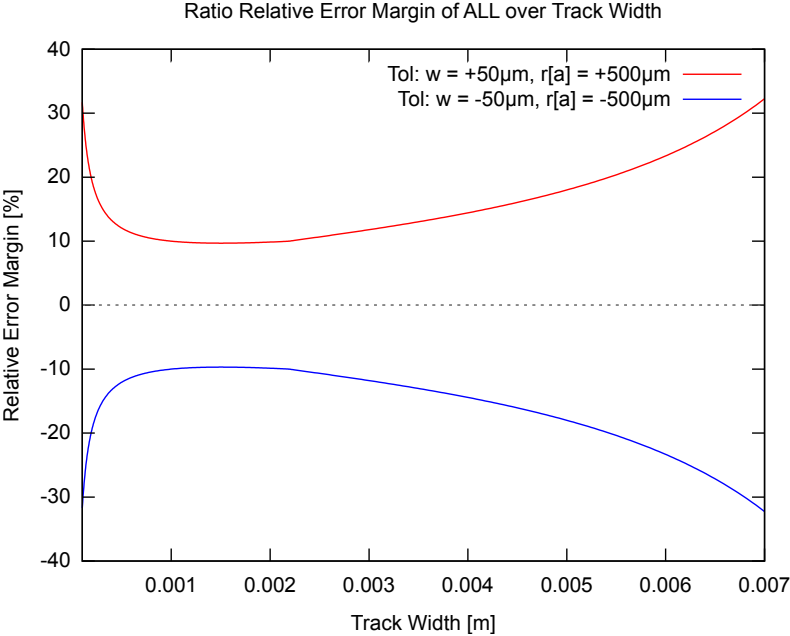


Abbildung 7.10.: Relative Fehlergrenze Ratio R_{Loss}/R_{Rad} über w von 0.1 bis 7 mm

7.3. Wirkungsgrad

Die im vorausgegangenen Kapitel 7.2 Berechnung des Verlust- zu Strahlungsverhältnisses kann noch einmal verbessert werden, indem man nach [EJ03, S. 2] mathematisch den Wirkungsgrad bestimmt.

Da es sich hier, wie auf 2.2 auf Seite 4 gezeigt, um eine Serienschaltung handelt ergibt sich der Wirkungsgrad über die Leistung aus den Widerstandsverhältnissen wie folgt:

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{I^2 R_{Rad}}{I^2 (R_{Rad} + R_{Loss})} = \frac{R_{Rad}}{R_{Rad} + R_{Loss}} \quad (7.4)$$

$$\eta = \frac{Z_0 \frac{8}{3} \pi^5 \left(\frac{f}{c_0}\right)^4 (r_a - w)^4}{Z_0 \frac{8}{3} \pi^5 \left(\frac{f}{c_0}\right)^4 (r_a - w)^4 + \left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2}\right] \sqrt{\pi^3 f \frac{\mu_0}{\sigma}}} \quad (7.5)$$

Oder auch mit der eingeführten Konstante k_1 etwas "handlicher":

$$\eta = \frac{k_1 (r_a - w)^4}{k_1 (r_a - w)^4 + k_2 \left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2}\right]} \quad (7.6)$$

Im weiteren Verlauf wird die Konstante k_1 noch einmal auftauchen. Für eine händische Differenziation erleichtert sie die Berechnung.

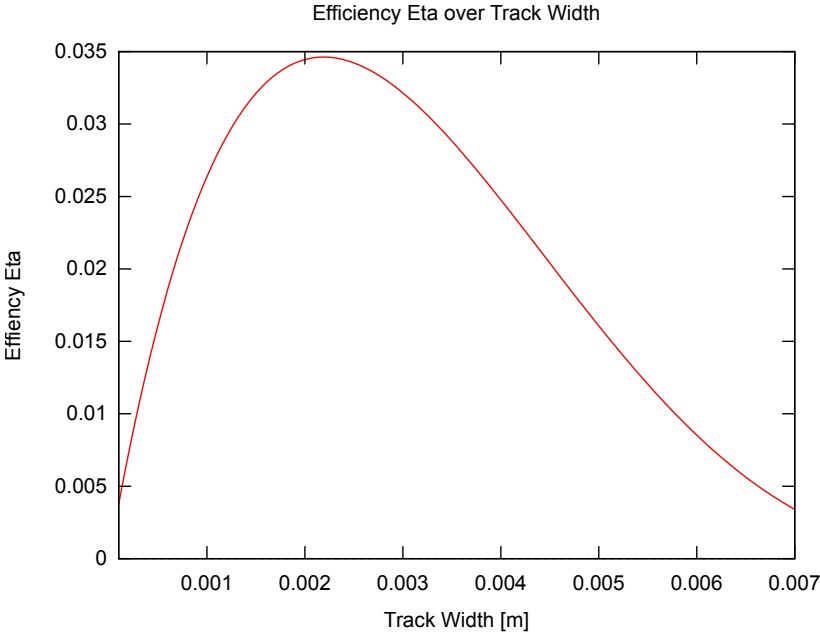


Abbildung 7.11.: Antennenwirkungsgrad Eta

7.4. Stabilität

Die Betrachtung von Abb. 7.12 zeigt schnell, dass der Wirkungsgrad steigt, sobald man größere Radien verwendet. Umgekehrt formuliert sollte also bei der Verwendung von kleineren Radien recht genau auf das Zusammenspiel von Strahlungs- und Verlustwiderstand geachtet werden. Vergrößert sich der Radius, wird dieser Zusammenhang zunehmend vernachlässigbar.

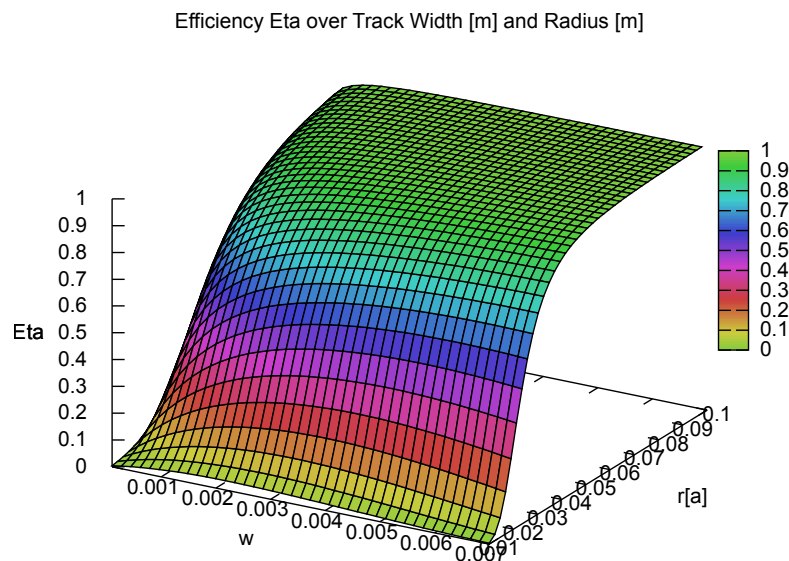
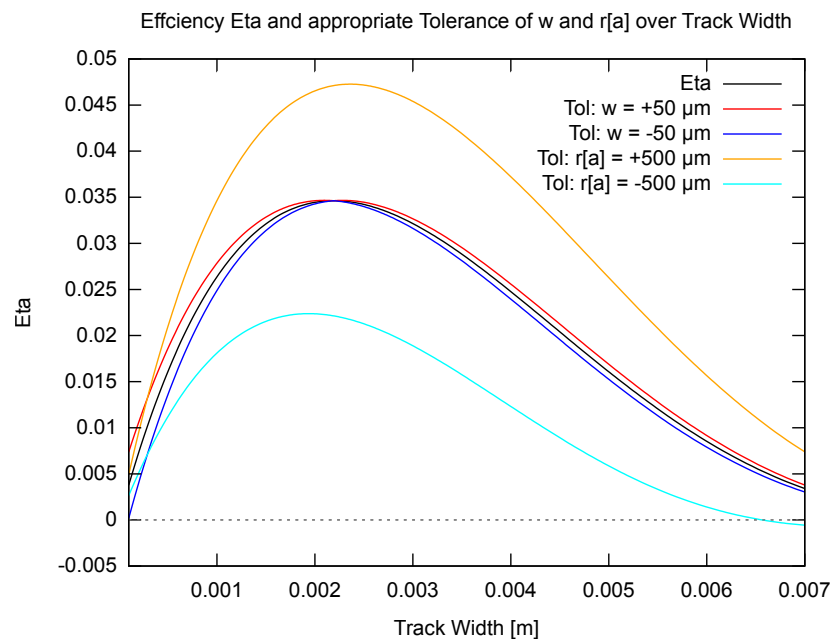
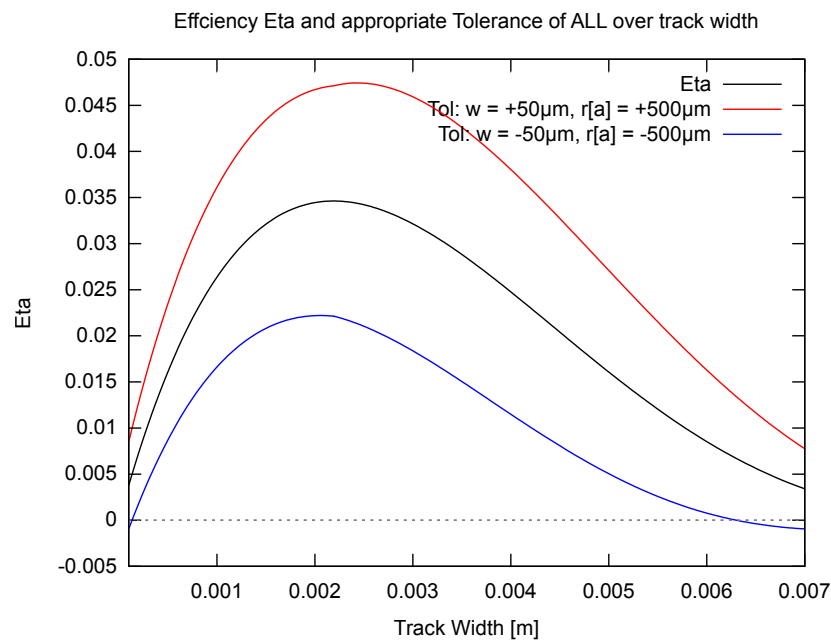


Abbildung 7.12.: Antennenwirkungsgrad nach Gl. 7.5 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

Abbildung 7.13.: Wirkungsgrad und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mmAbbildung 7.14.: Wirkungsgrad und Gesamttoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

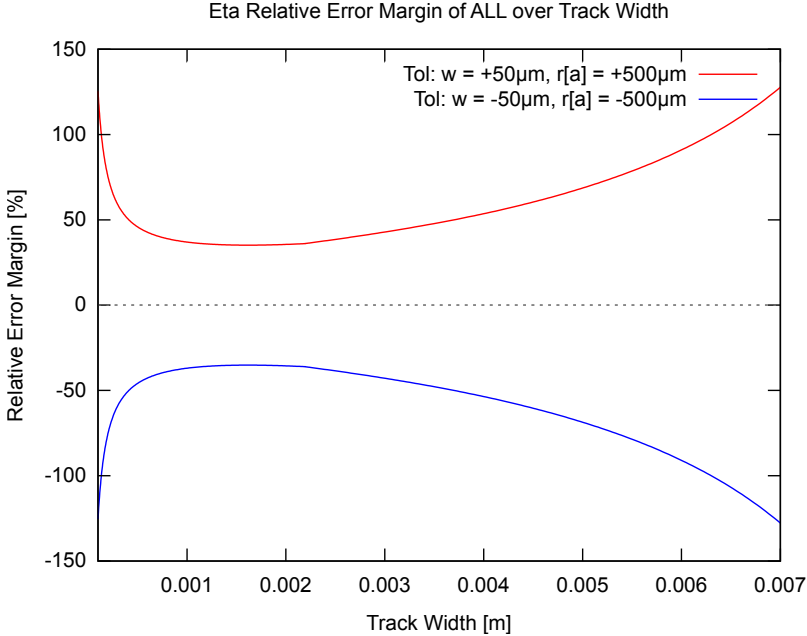


Abbildung 7.15.: Relative Fehlergrenze Wirkungsgrad über w von 0.1 bis 7 mm

7.5. Maximaler Wirkungsgrad

7.5.1. Erste Ableitung

$$\eta' = \frac{d\eta}{dw} = \frac{d}{dw} \left[\frac{k_1 (r_a - w)^4}{k_1 (r_a - w)^4 + k_2 \left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right]} \right] \quad (7.7)$$

$$\frac{d\eta}{dw} = - \frac{k_1 \left(-4k_1 (r_a - w)^3 - \frac{k_2 r_a}{w^2} \right) (r_a - w)^4}{\left(k_1 (r_a - w)^4 + k_2 \left(\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right) \right)^2} - \frac{4k_1 (r_a - w)^3}{k_2 \left(\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right) + k_1 (r_a - w)^4} \quad (7.8)$$

7.5.2. Extrempunkt Maximum

Für die Differenziation hat sich gezeigt, dass es "handlicher" ist alle nicht nach w abzuleitenden Werte zu k_1 und k_2 zusammenzufassen, um so leichter differenzieren zu können. Es ist also einfacher besser 7.6 als 7.5 zum differenzieren zu verwenden.

Die Werte hinter k_1 und k_2 ergeben sich aus dem Unterschied der beiden Gleichungen 7.5 und 7.6.

Zum Bestimmen des Maximums muss nun die erste Ableitung von η zu Null gesetzt werden und anschließend nach w umgestellt werden.

$$\frac{d\eta}{dw} = 0 \quad (7.9)$$

$$0 = - \frac{k_1 \left(-4k_1 (r_a - w)^3 - \frac{k_2 r_a}{w^2} \right) (r_a - w)^4}{\left(k_1 (r_a - w)^4 + k_2 \left(\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right) \right)^2} - \frac{4k_1 (r_a - w)^3}{k_2 \left(\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2} \right) + k_1 (r_a - w)^4} \quad (7.10)$$

$$w_1 = - \frac{(\sqrt{17} - 5) \cdot r_a}{4}, w_2 = \frac{(5 + \sqrt{17}) \cdot r_a}{4}, w_3 = r_a \quad (7.11)$$

Die beiden Lösungen w_2 und w_3 sind zwar mathematisch richtig, ergeben in der Praxis jedoch keinen physikalischen Sinn. Aus diesem Grund ist für die Praxis lediglich Lösung w_1 richtig.

$$w = w_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \cdot r_a \quad (7.12)$$

$$\eta_{Max} \rightarrow \frac{w}{r_a} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \approx 0.22 \quad (7.13)$$

Hiermit ergibt sich somit die interessante Lösung, dass ein maximaler Wirkungsgrad bei einem Verhältnis von ca. 0.22 zwischen Leiterbreite zu Außenradius erzielt wird.

8. Antenneninduktivität

8.1. Anteil der effektiven Loop-Fläche

Laut [Nik14, eqn. 12.34] errechnet sich der Anteil der Loop-Induktivität über die eingeschlossene Fläche der Loop-Antenne wie folgt:

$$L_{A_{Loop}} = \mu_0 \cdot r_a \left[\ln \left(\frac{8r_a}{w} - 2 \right) \right] \quad (8.1)$$

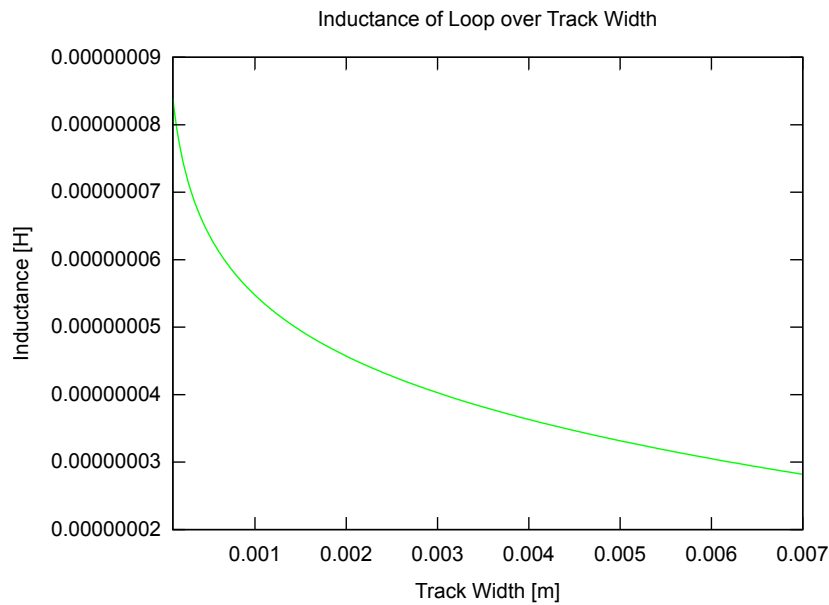


Abbildung 8.1.: Induktivität Loop

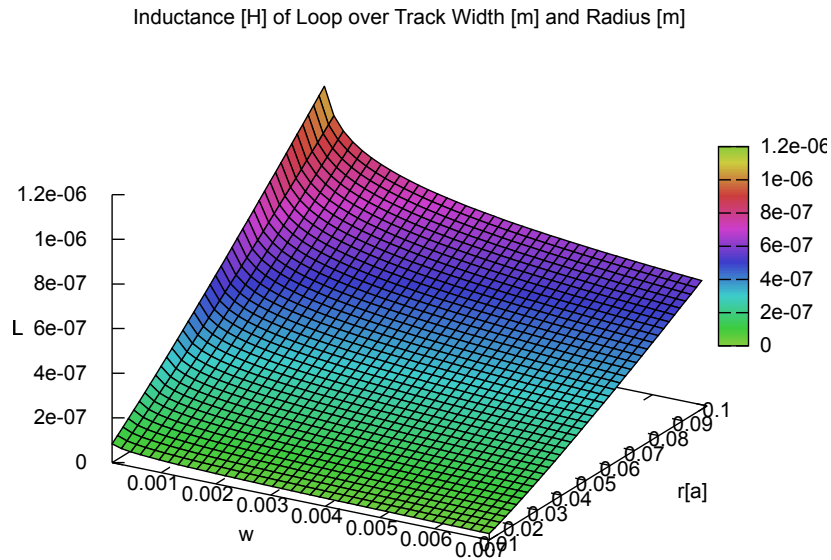


Abbildung 8.2.: Induktivitäten Loop nach Gl. 8.6 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

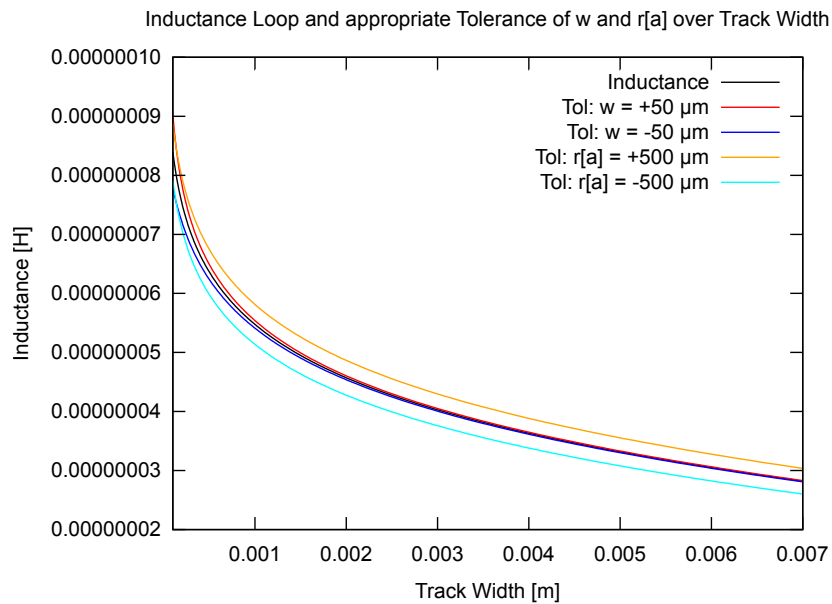


Abbildung 8.3.: Induktivität Loop-Anteil und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

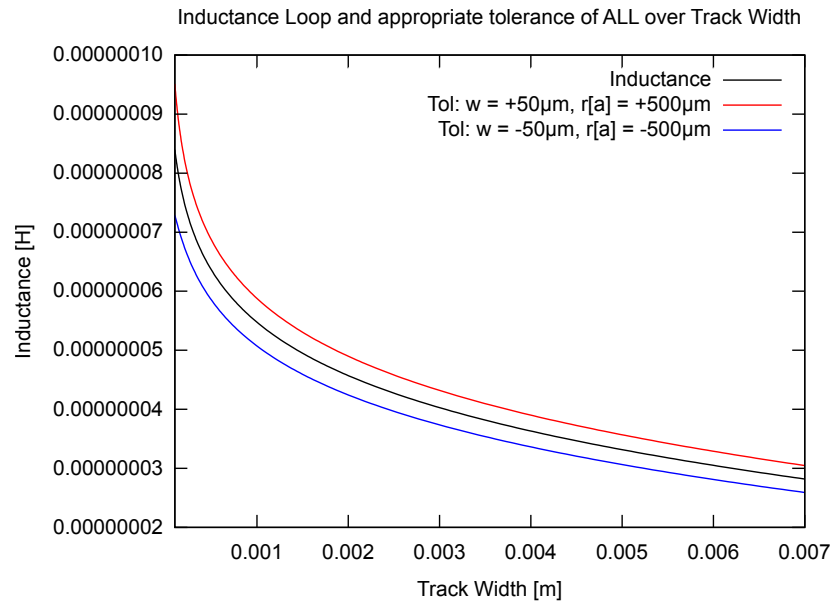


Abbildung 8.4.: Induktivität Loop-Anteil und Gesamtteranz über w von 0.1 bis 7 mm

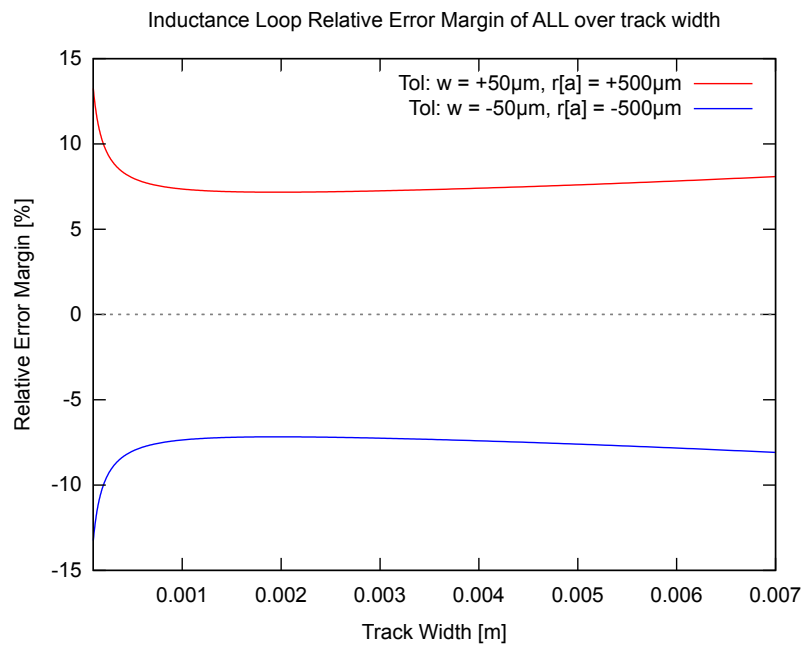


Abbildung 8.5.: Relative Fehlergrenze Induktivität Loop-Anteil über w von 0.1 bis 7 mm

8.2. Anteil der Drahtlänge

In [Nik14, eqn. 12.36] berechnet sich der intrinsische Anteil der Induktivität des Drahtes zu:

$$L_{Wire} = \frac{\mu_0}{8\pi} \cdot l \quad (8.2)$$

Für eine Loop-Antenne mit der Länge $l = 2\pi\bar{r}$:

$$L_{Wire} = \frac{\mu_0}{8\pi} \cdot 2\pi\bar{r} = \frac{\mu_0}{4} \cdot \frac{r_a + r_i}{2} = \frac{\mu_0}{4} \cdot \frac{r_a + r_a - w}{2} = \frac{\mu_0}{4} \cdot \frac{2r_a - w}{2} \quad (8.3)$$

$$L_{Wire} = \frac{\mu_0}{8} (2r_a - w) \quad (8.4)$$

Anmerkung: Der Anteil der intrinsischen Induktivität über die Drahtlänge ist immer sehr gering und wird meist vernachlässigt. Er liegt bei UHF-Antennen im kleinen einstelligen NanoHenry-Bereich. Ausnahmsweise wird er bei diesen Berechnungen berücksichtigt.

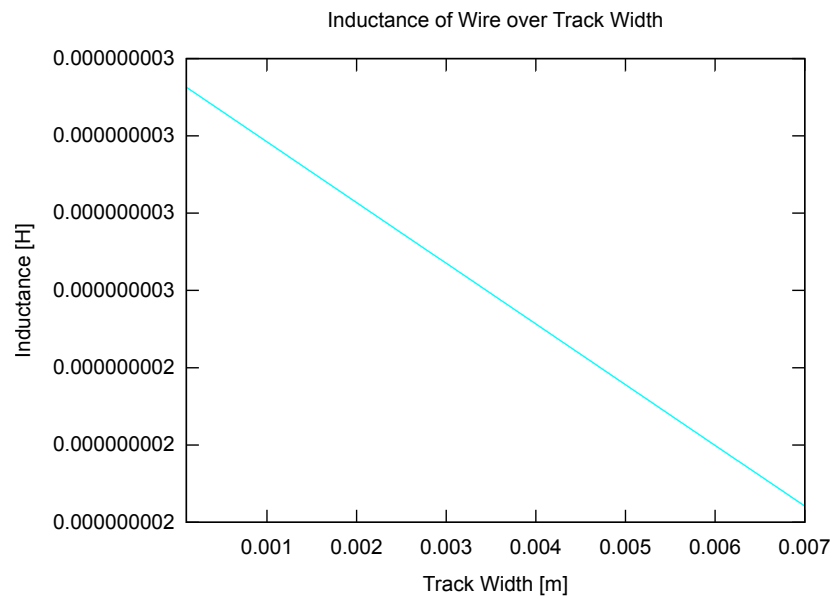


Abbildung 8.6.: Induktivitäten

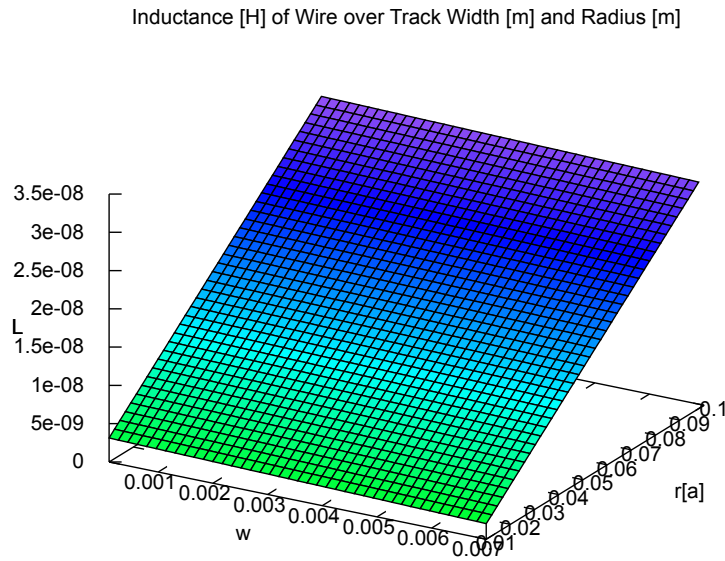


Abbildung 8.7.: Induktivitäten nach Gl. 8.6 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

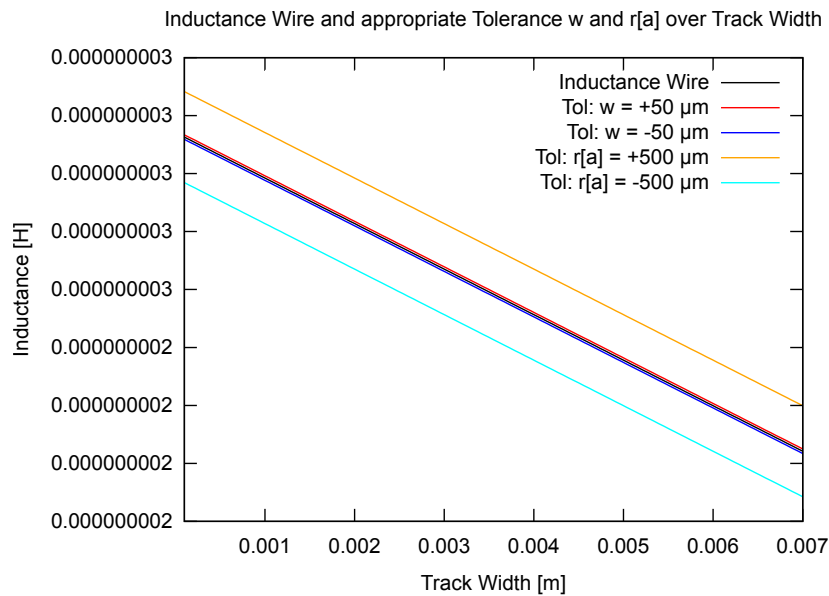


Abbildung 8.8.: Induktivität Draht-Anteil und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

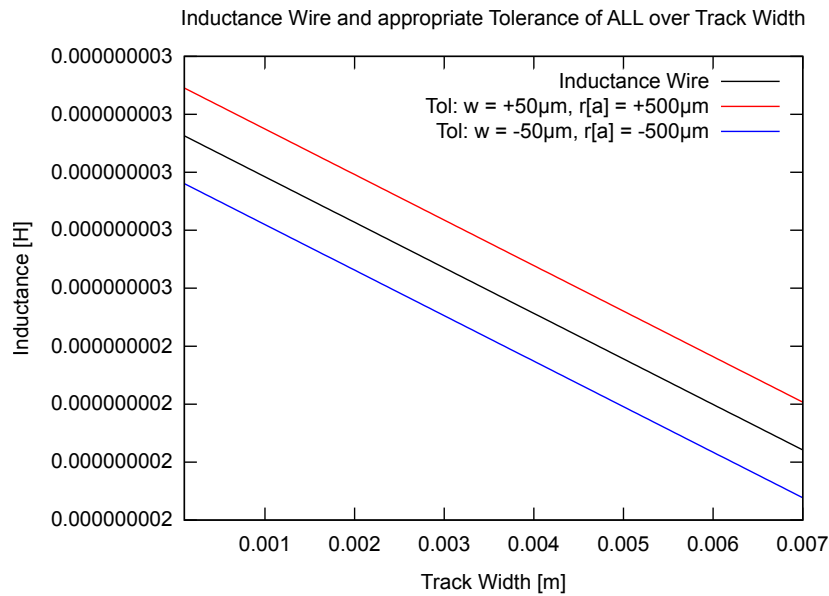


Abbildung 8.9.: Induktivität Draht-Anteil und Gesamttoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

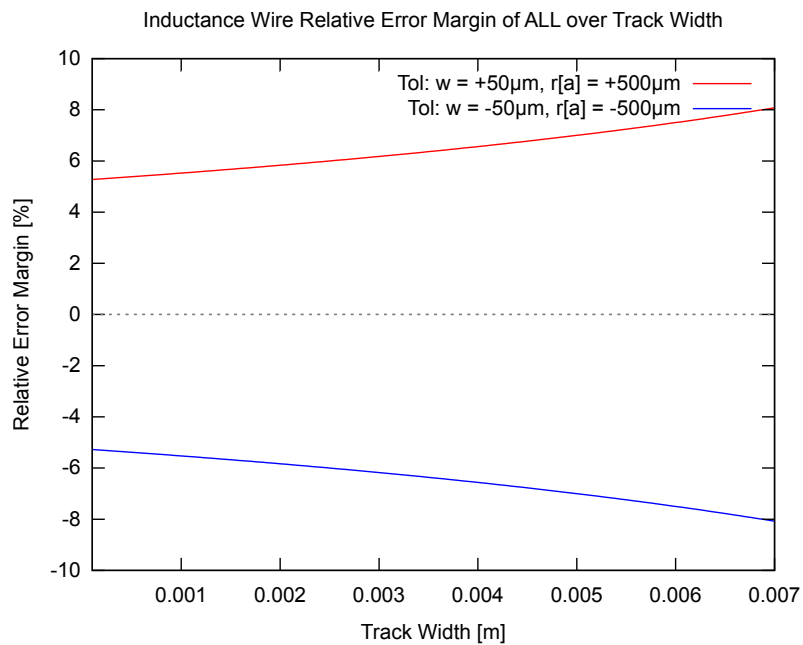


Abbildung 8.10.: Relative Fehlergrenze Induktivität Draht-Anteil über w von 0.1 bis 7 mm

8.3. Gesamtinduktivität

$$L_{Ges} = L_{A_{Loop}} + L_{Wire} \quad (8.5)$$

$$L_{Ges} = \mu_0 \cdot r_a \ln \left(\frac{8r_a}{w} - 2 \right) + \frac{\mu_0}{8} (2r_a - w) \quad (8.6)$$

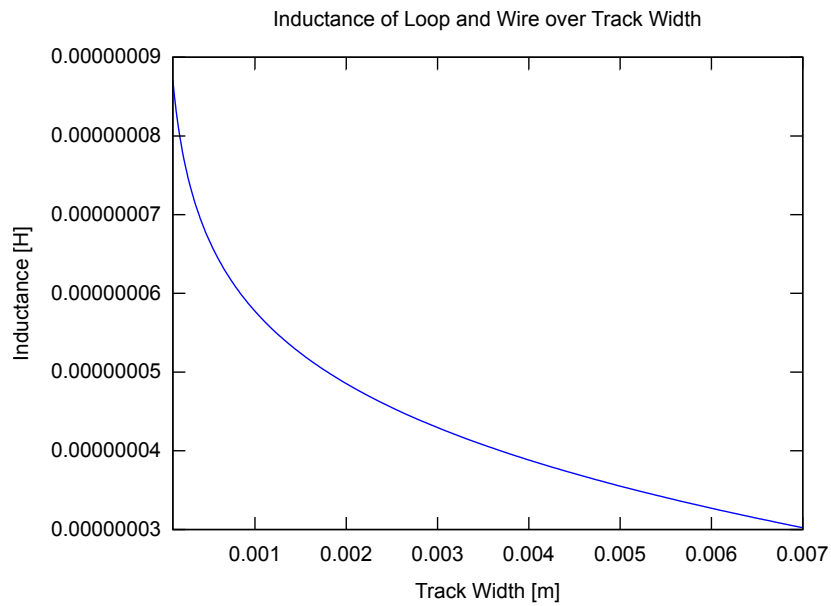


Abbildung 8.11.: Induktivitäten

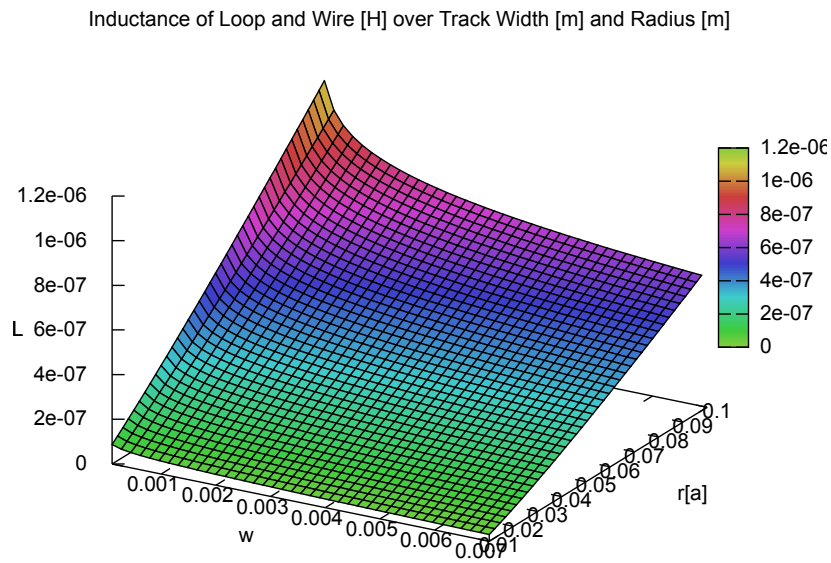


Abbildung 8.12.: Induktivitäten nach Gl. 8.6 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

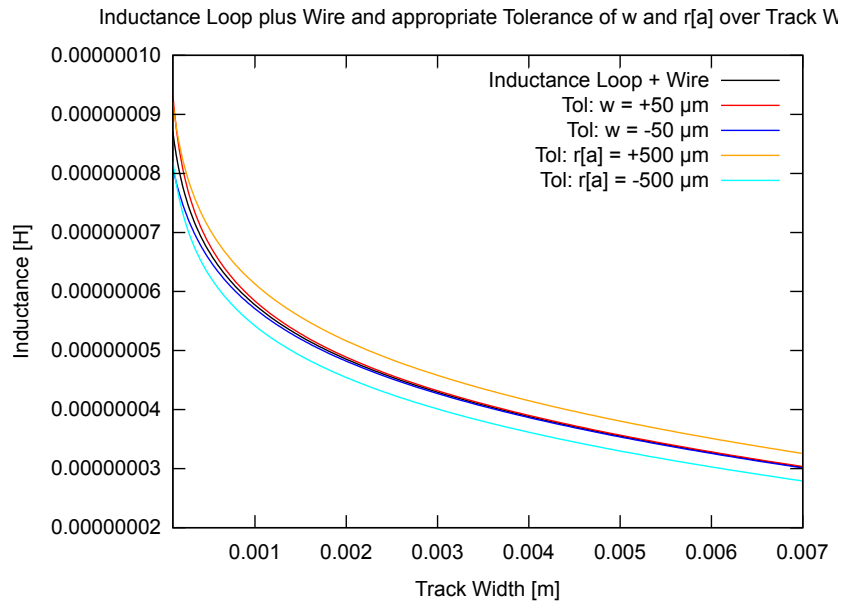


Abbildung 8.13.: Induktivität Loop plus Draht und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

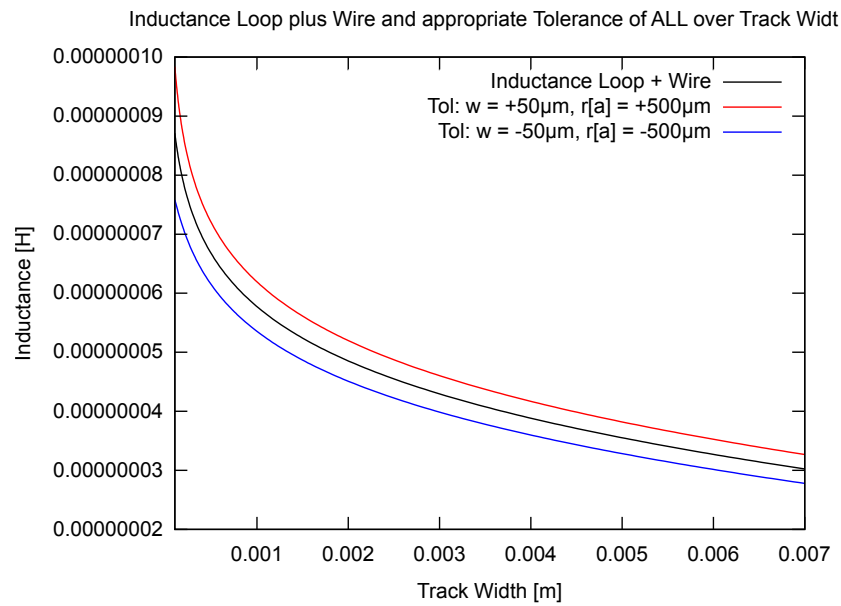


Abbildung 8.14.: Induktivität Loop plus Draht und Gesamttoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

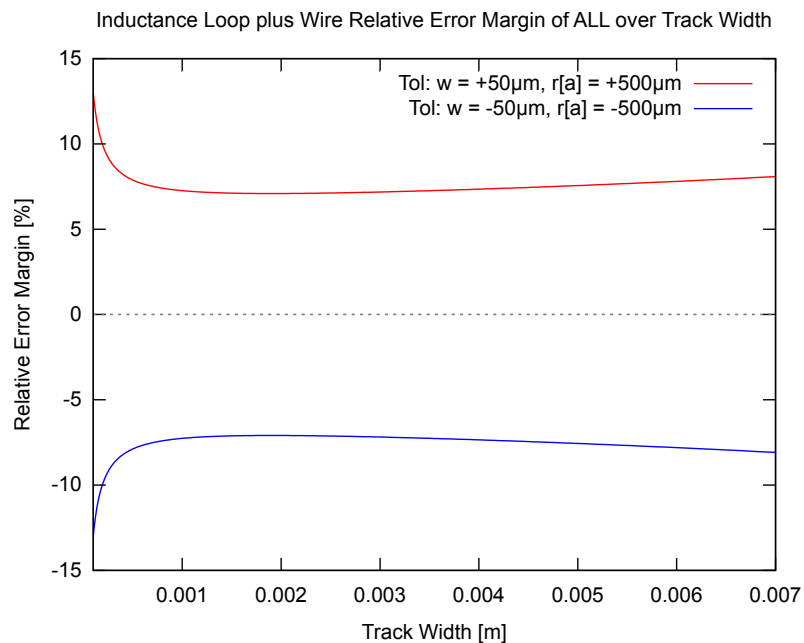


Abbildung 8.15.: Relative Fehlergrenze Induktivität Loop plus Draht über w von 0.1 bis 7 mm

9. Antennengütefaktor

9.1. Güte mit und ohne Anpassung

Der hier berechnete Gütefaktor bezieht sich ausschließlich nur auf die Antennenstruktur. Er darf nicht verwechselt werden mit der Güte, welche sich am Anpassungspunkt zwischen C_1 und C_2 in Abb. 2.2 auf Seite 4 ergibt.

9.2. Berechnung

$$Q = \frac{X_{L_{Sum}}}{R_{Wirk}} = \frac{\omega \cdot L_{Sum}}{R_{Wirk}} \quad (9.1)$$

$$Q = \omega \frac{L_{A_{Loop}} + L_{Wire}}{R_{Rad} + R_{Loss}} \quad (9.2)$$

Die jeweiligen Gleichungen 5.3, 6.5, 8.4 und 8.4 für Strahlungswiderstand, Verlustwiderstand, Loop-Induktivität und Leitungsinduktivität eingesetzt in 9.2 ergibt sich nun:

$$Q = 2\pi f \mu_0 \frac{r_a \ln\left(\frac{8r_a}{w} - 2\right) + \frac{1}{8}(2r_a - w)}{Z_0 \frac{8}{3} \pi^5 \left(\frac{f}{c_0}\right)^4 (r_a - w)^4 + \left[\frac{r_a}{w} - \frac{1}{2}\right] \sqrt{\pi^3 f \frac{\mu_0}{\sigma}}} \quad (9.3)$$

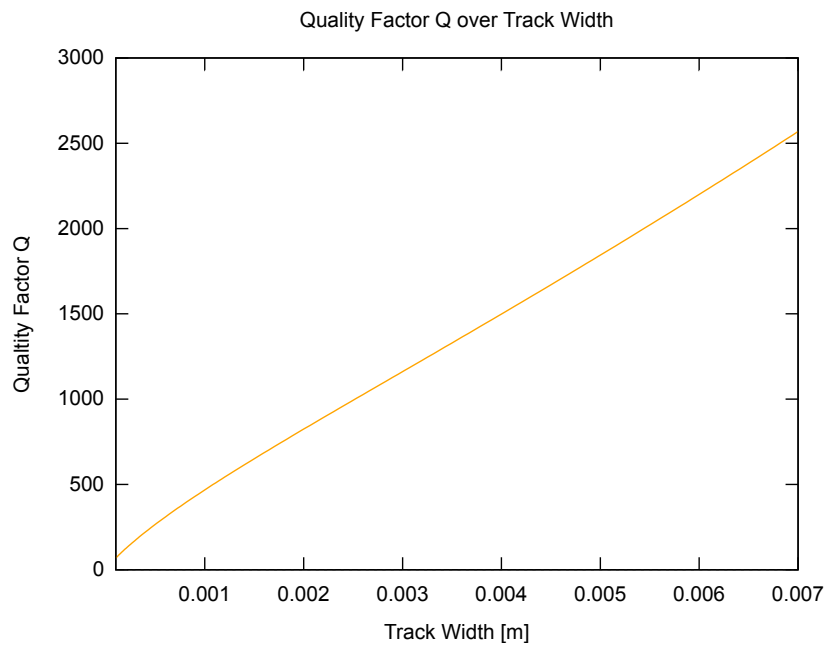


Abbildung 9.1.: Güte Q

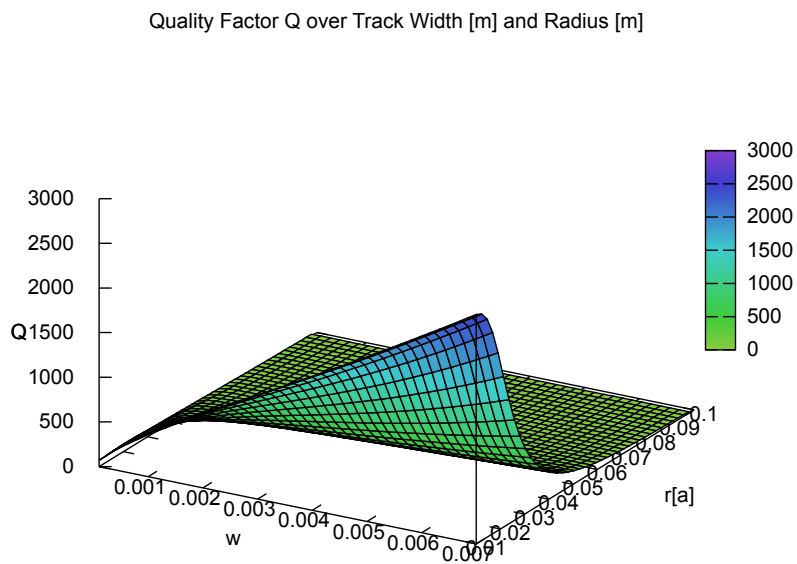


Abbildung 9.2.: Güte Q nach Gl. 9.3 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

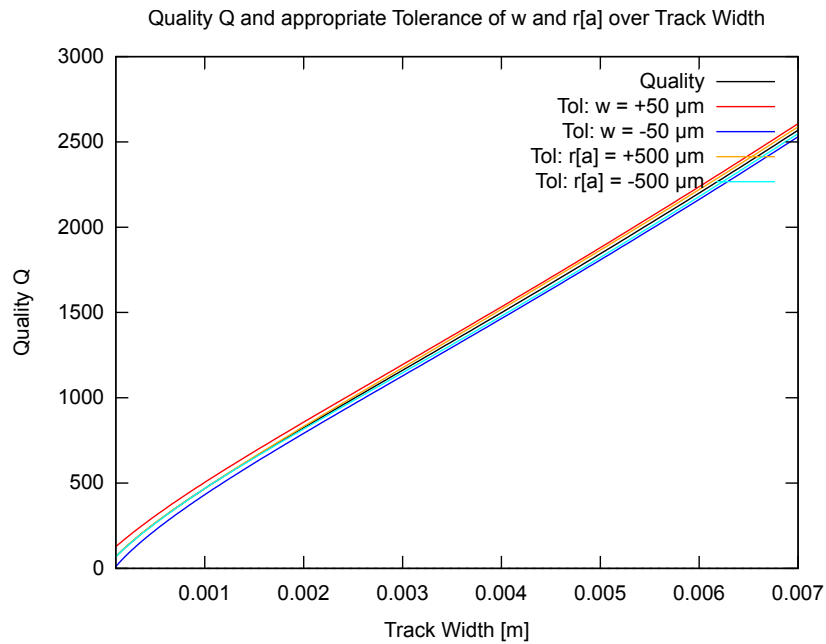


Abbildung 9.3.: Güte Q und Einzeltoleranz über w von 0.1 bis 7 mm

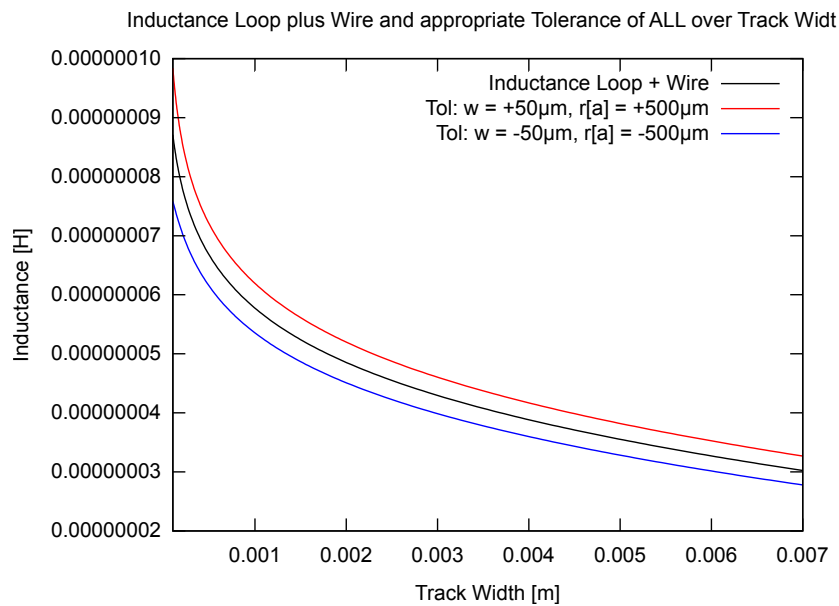


Abbildung 9.4.: Güte Q und Gesamt toleranz über w von 0.1 bis 7 mm

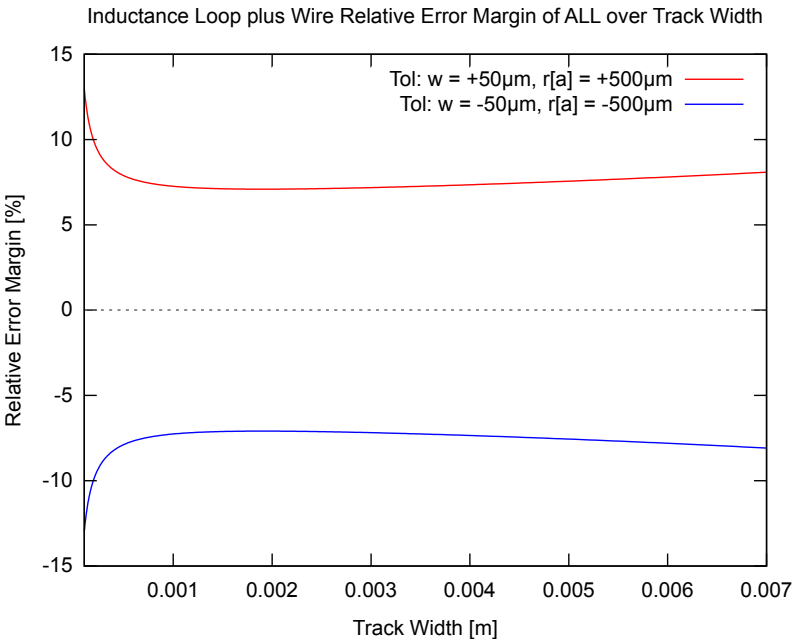


Abbildung 9.5.: Relative Fehlergrenze Güte Q über w von 0.1 bis 7 mm

10. Antennenanpassung

Entsprechend Abb. 2.2 können nun die beiden Kondensatoren C_1 und C_2 bestimmt werden. Während dieser Teil in der Praxis für einen erfahrenen HF-Entwickler prinzipiell recht einfach ist, so ist dies bei der mathematischen Bestimmung etwas umfangreicher.

10.1. Impedanzgleichung

Zuerst muss nun eine Impedanzgleichung aufgestellt werden, d.h. die Impedanz, die der Generator auch *sieht*, wenn er in den Schwingkreis (parallel zu C_2) *hineinschaut*. Diese Impedanz muss dann der Generator (konjugiert komplex) treiben.

Der Einfachheit halber (da man sie von außen nicht unterscheiden kann) werden die Induktivitäten L_A und L_i zu L und die Widerstände R_{Rad} und R_{Loss} zu R zusammengefasst. Dies ist für ein elektrisches Ersatzschaltbild tragbar da es sich nicht um ein Modell für Abstrahlung handelt, sondern um Maschen und Knoten in einem in sich geschlossenen Netzwerk.

Die Impedanz lässt sich in Worten sehr einfach beschreiben: *Die Summe der Blindwiderstände der Komponenten R , L und C_1 wird komplex addiert und dann mit dem Blindwiderstand von C_2 komplex parallel geschaltet.*

Die Impedanzgleichung in der Anfangsform:

$$\bar{Z} = \left[R_{Rad} + R_{Loss} + j\omega(L_a + L_i) + \frac{1}{j\omega C_1} \right] \parallel \frac{1}{j\omega C_2} \quad (10.1)$$

Aufgeschlüsselt nach Real- und Imaginärteil:

$$\bar{Z} = Re\{\bar{Z}\} + jIm\{\bar{Z}\} \quad (10.2)$$

Aus Platzgründen wird der Real- und Imaginärteil einzeln dargestellt.

$$\boxed{Re\{\bar{Z}\} = \frac{\frac{R}{\omega^2 C_2^2}}{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2}\right]^2}} \quad (10.3)$$

$$\boxed{Im\{\bar{Z}\} = \frac{\frac{R^2}{\omega C_2} - \left[\frac{L}{C_2} - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}\right] \left[\omega L - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2}\right]}{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2}\right]^2}} \quad (10.4)$$

$$\boxed{Z = |\bar{Z}| = \sqrt{Re\{\bar{Z}\}^2 + Im\{\bar{Z}\}^2}} \quad (10.5)$$

Sind die Werte für C_1 und C_2 bekannt, so kann man durch einsetzen aller bekannten Werte von L , R , C_1 und C_2 überprüfen ob die richtige komplexe Impedanz \bar{Z} dabei herauskommt. Nicht immer, jedoch meist wird dabei 50 Ω Technologie verwendet, d.h.

$$\bar{Z} = (50 + j0) \Omega \equiv |\bar{Z}| = Z = 50\Omega \quad (10.6)$$

10.2. Kontrolle der Anpassung

Folgende Größen dienen der Beurteilung der korrekten Anpassung:

- Voltage Standing Wave Ratio, Stehwellenverhältnis (**VSWR**)
- Mismatch Loss, Fehlanpassungsdämpfung (**ML**)
- Return Loss, Rückwärtsdämpfung (**RL**)

Für die Herleitung der Gleichungen 10.6 bis 10.9 sei auf [s. Bro15, Kap. VII] verwiesen.

Mit dem Einsetzen der realen und imaginären Quellen- und Lastwiderstände R_Q , X_Q , R_L und X_L ergibt sich der Zwischenwert ρ zu:

$$\rho = \sqrt{\left[\frac{R_L^2 - R_Q^2 + X_L^2 - X_Q^2}{(R_L + R_Q)^2 + (X_L + X_Q)^2}\right]^2 + \left[2\frac{R_Q X_L - R_L X_Q}{(R_L + R_Q)^2 + (X_L + X_Q)^2}\right]^2} \quad (10.7)$$

Das **VSWR**, **ML** und **RL** lauten folgendermaßen:

$$\boxed{VSWR = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}} \quad (10.8)$$

$$ML = 10dB \cdot \log_{10} (1 - \rho^2) \quad (10.9)$$

$$RL = 20dB \cdot \log_{10} (\rho) \quad (10.10)$$

10.3. Umstellung der Impedanzgleichung

Der Vollständigkeit halber erfolgt hier die Auflösung bzw. Umstellung der Impedanzgleichung 10.3 und 10.4 nach C_1 und C_2 . Da hier zwei Gleichungen mit zwei unbekanntem vorliegen ist die Gleichung also lösbar. Aufgrund der Quadratur ergeben sich lediglich pro Kondensator zwei Lösungen, d.h. insgesamt also vier Gleichungen.

$$C_{1A} = -\frac{C_2 \cdot \sqrt{R \cdot \operatorname{Re}_Z} - C_2^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \operatorname{Re}_Z^2 + (C_2 - C_2^2 \cdot \omega^2 \cdot L) \cdot \operatorname{Re}_Z}{(C_2^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 + C_2^2 \cdot \omega^4 \cdot L^2 - 2 \cdot C_2 \cdot \omega^2 \cdot L + 1) \cdot \operatorname{Re}_Z - R} \quad (10.11)$$

$$C_{1B} = \frac{C_2 \cdot \sqrt{R \cdot \operatorname{Re}_Z} - C_2^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \operatorname{Re}_Z^2 + (C_2^2 \cdot \omega^2 \cdot L - C_2) \cdot \operatorname{Re}_Z}{(C_2^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 + C_2^2 \cdot \omega^4 \cdot L^2 - 2 \cdot C_2 \cdot \omega^2 \cdot L + 1) \cdot \operatorname{Re}_Z - R} \quad (10.12)$$

$$C_{2A} = -\frac{C_1 \cdot \sqrt{(C_1^2 \cdot \omega^2 \cdot R^3 + (C_1^2 \cdot \omega^4 \cdot L^2 - 2 \cdot C_1 \cdot \omega^2 \cdot L + 1) \cdot R) \cdot \operatorname{Re}_Z - C_1^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \operatorname{Re}_Z^2 + (C_1 - C_1^2 \cdot \omega^2 \cdot L) \cdot \operatorname{Re}_Z}}{(C_1^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 + C_1^2 \cdot \omega^4 \cdot L^2 - 2 \cdot C_1 \cdot \omega^2 \cdot L + 1) \cdot \operatorname{Re}_Z} \quad (10.13)$$

$$C_{2B} = \frac{C_1 \cdot \sqrt{(C_1^2 \cdot \omega^2 \cdot R^3 + (C_1^2 \cdot \omega^4 \cdot L^2 - 2 \cdot C_1 \cdot \omega^2 \cdot L + 1) \cdot R) \cdot \operatorname{Re}_Z - C_1^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \operatorname{Re}_Z^2 + (C_1^2 \cdot \omega^2 \cdot L - C_1) \cdot \operatorname{Re}_Z}}{(C_1^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 + C_1^2 \cdot \omega^4 \cdot L^2 - 2 \cdot C_1 \cdot \omega^2 \cdot L + 1) \cdot \operatorname{Re}_Z} \quad (10.14)$$

Die Anwendung dieser Methode ist natürlich *etwas sperrig*. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Praktikermethode eines HF-Entwicklers der Wertebestimmung per **NWA** die vermutlich bessere und schnellere Methode ist.

11. Antennenresonanz

Mit Hilfe der beiden Kondensatoren C_1 und C_2 wird die Antenne in Resonanz gebracht und auf die gewünschte Impedanz eingestellt. Da der extrem kleine Wirkwiderstand bestehend aus R_{Rad} und R_{Loss} in Summe weniger als 1Ω beträgt, dieser aber mittels kapazitiver Spannungsteilung auf 50Ω transformiert wird, ist die Resonanzkurve sehr spitz und muss somit äußerst feinfühlig bestimmt werden.

Die Bilder 11.2 bis 11.4 zeigen die Resonanz in Abhängigkeit von der Leiterbreite w . Real- und Imaginärteil der Impedanz verhalten sich so, wie man es bei Schwingkreisen kennt, wo ein einziges frequenzbestimmendes Bauelement die Resonanzfrequenz verändert.

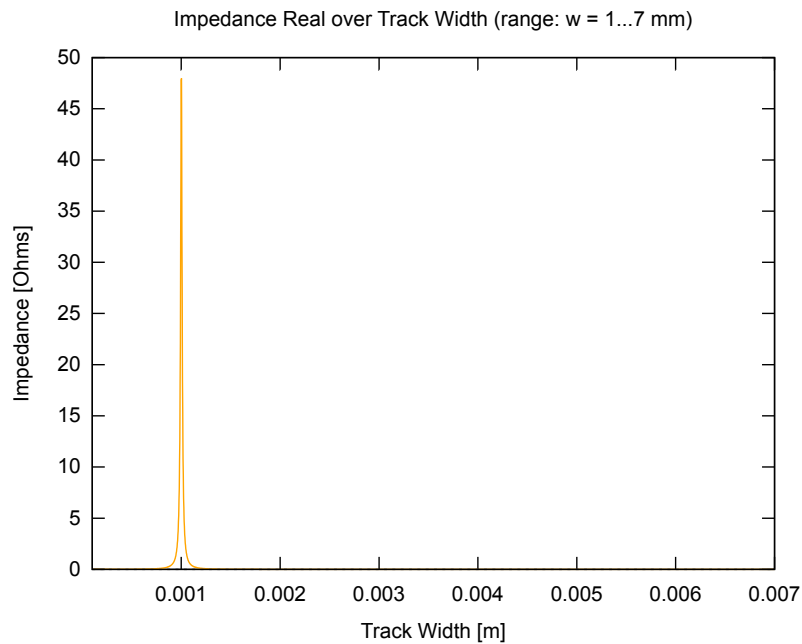


Abbildung 11.1.: Antennenimpedanz Realteil nach Gl. 10.3 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und einem Radius von 10 mm

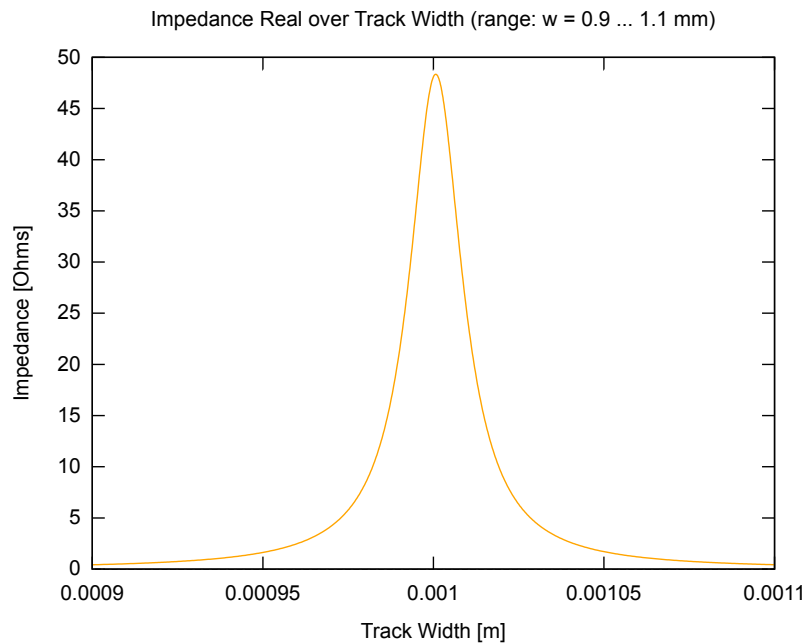


Abbildung 11.2.: Antennenimpedanz Realteil nach Gl. 10.3 bei verschiedenen Leiterbreiten von um 0.1 mm und einem Radius von 10 mm

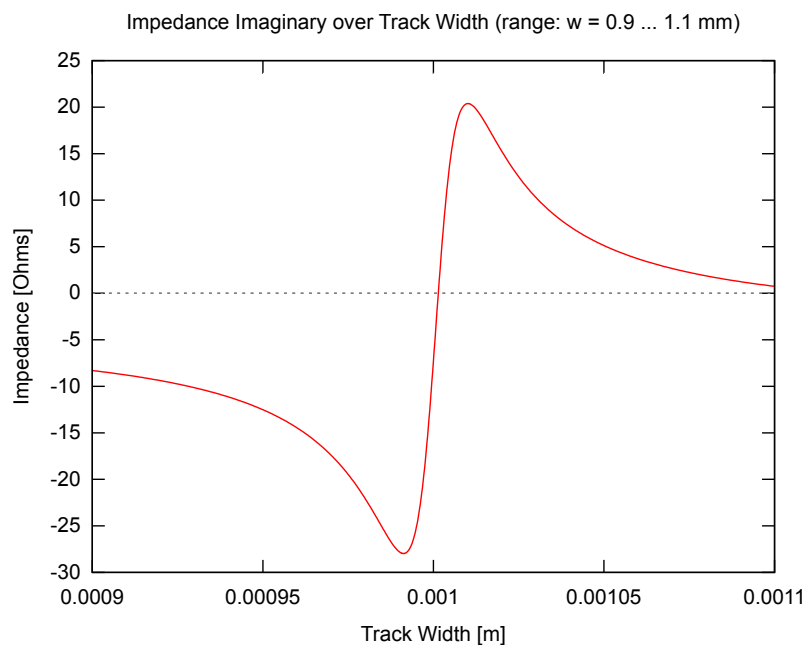


Abbildung 11.3.: Antennenimpedanz Imaginärteil nach Gl. 10.4 bei verschiedenen Leiterbreiten von um 0.1 m und einem Radius von 10 mm

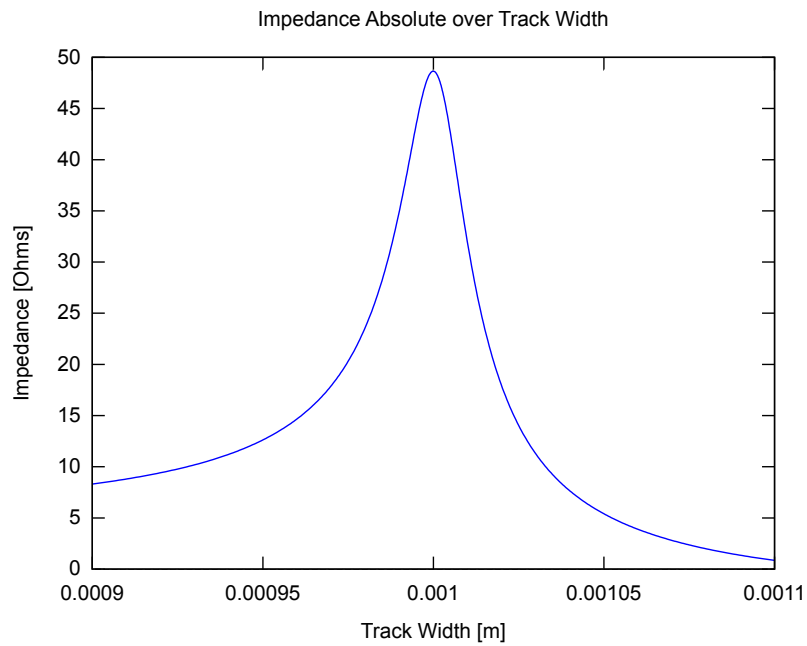


Abbildung 11.4.: Antennenimpedanz Betrag nach Gl. 10.4 bei verschiedenen Leiterbreiten von um 0.1 mm und einem Radius 10 mm

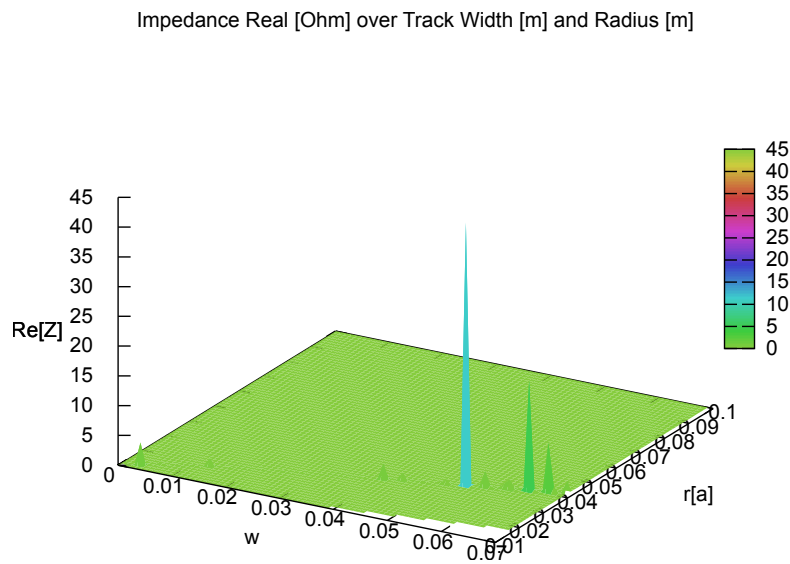


Abbildung 11.5.: Antennenimpedanz Realteil nach Gl. 10.3 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

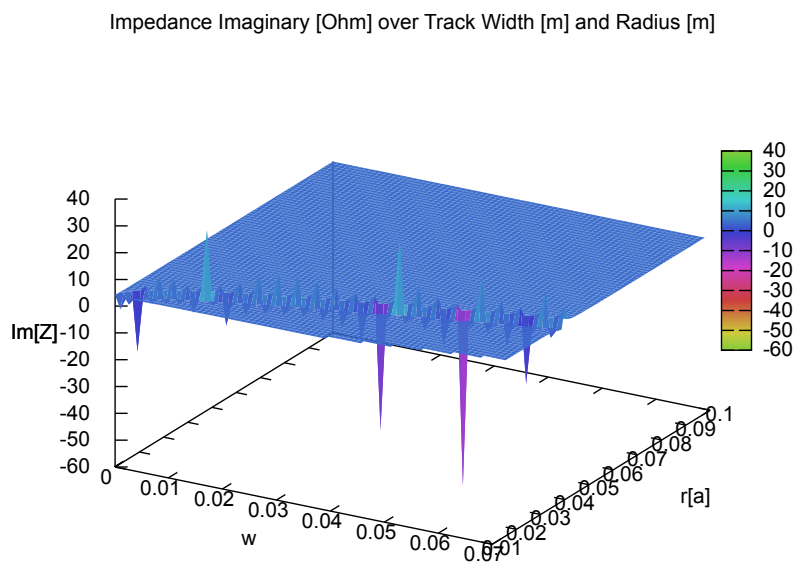


Abbildung 11.6.: Antennenimpedanz Imaginärteil nach Gl. 10.4 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

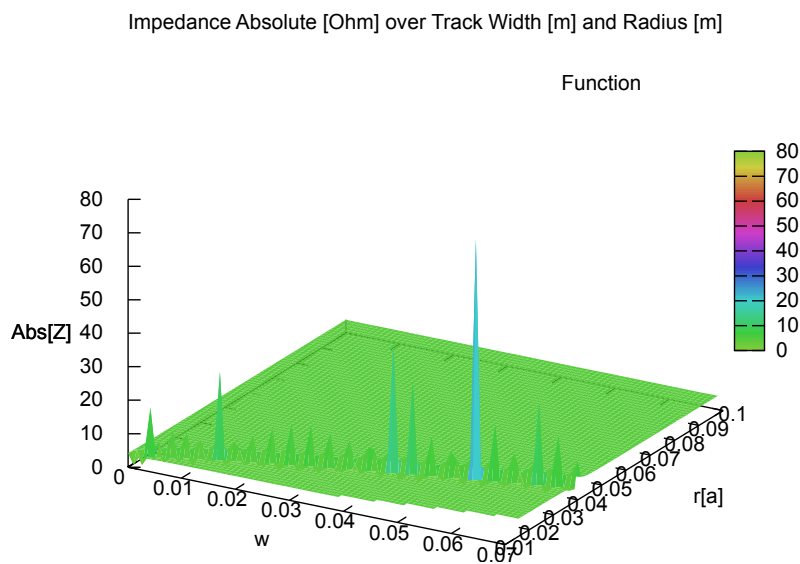


Abbildung 11.7.: Antennenimpedanz Betrag nach Gl. 10.4 bei verschiedenen Leiterbreiten von 0.1 bis 7 mm und Radien von 10 bis 100 mm

12. Zusammenfassung

In dieser Ausarbeitung wurden einige, jedoch nicht alle, Aspekte einer kleinen Loop-Antenne berücksichtigt. Hauptaugenmerk wurde darauf gelegt, mit welchen Parametern und an welchen Arbeitspunkten die Antenne stabil oder weniger stabil arbeitet.

Es wurde bewusst auf das Einbringen von Praktikerwissen verzichtet. Alle Erkenntnisse wurden aus mathematischen Gleichungen hergeleitet.

Die (zumindest für den Autor) wesentlichen neuen Erkenntnisse waren die quantitative Bestimmung des maximalen Wirkungsgrades und dessen Fehlergrenzverlauf bei vorgegebenen Toleranzen.

12.1. Maximaler Wirkungsgrad

Der optimale Wirkungsgrad einer Loop Antenne wie in Abb. 2.1 auf Seite 2 ist dann gegeben, wenn das **Verhältnis Außenradius zu Leiterbreite** entsprechend Gleichung 7.13 auf Seite 33 **zirka 0.22** beträgt.

Bei einer Loop-Antenne mit z.B. zwei Zentimeter Durchmesser, ergibt sich somit hinsichtlich des Wirkungsgrades eine optimale Leiterbreite von 2.2 Millimeter.

Das Ergebnis ist insofern erstaunlich, da keinerlei Abhängigkeiten weder von der Frequenz vorhanden sind.

12.2. Fehlergrenzen bei maximalem Wirkungsgrad

Bei den Berechnungen zur Abhängigkeit der Toleranz von der Leiterbreite und von der des Außenradius gab es bis auf eine Ausnahme keinerlei Überraschungen oder neue Erkenntnisse.

- Die einzige nennenswerte Ausnahme war hier jedoch **die starke Abhängigkeit des Wirkungsgrades η ¹ von der Toleranz des Außenradius**. Dieses Ergebnis ist noch erstaunlicher, da bei der Beurteilung der Widerstandsverhältnisse noch nicht mal Verstimmungseffekte aufgrund veränderter Induktivitäten (und somit Resonanzverstimmungen) enthalten sind.
- Weiterhin ist auffällig, **dass sich das errechnete Maximum verschiebt**. Auf den Abb. 7.13 und 7.14 der Toleranzgrenzen auf Seite 30 ist dies sehr gut zu erkennen².

12.3. Fehlergrenzen bei nicht-max. Wirkungsgrad

Außerhalb des Bereiches des maximalen Wirkungsgrades wird der Fehlergrenzverlauf sogar noch größer, d.h. hier "stret" der Wirkungsgrad noch mehr.

12.4. Relative Fehlergrenzen im Überblick

Alle errechneten relativen Fehlergrenzen wurden in Tabelle A.1 auf Seite IV des Anhangs gegenübergestellt.

Hier ist es möglich die relativen Fehlergrenzen unabhängig von der Rechengröße untereinander zu vergleichen, d.h. prozentuale Fehlergrenzen des Widerstandes können z.B. mit prozentualen Fehlergrenzen der Induktivität verglichen werden. So erkennt man schnell welche Größe am stärksten von Toleranzen vom Außenradius r_a und der Leiterbreite w abhängig ist.

¹Wirkungsgrad η : Das Verhältnis von Strahlungswiderstand zu Summenwiderstand bestehend aus Strahlungswiderstand plus Verlustwiderstand.

²Interessanterweise konnte man dieses Verhalten bereits in dem 3D-Bild Abb. 7.12 auf Seite 29 erkennen bzw. erahnen. Jedoch nicht so eindeutig, wie in einer Toleranzgrenzbestimmung.

A. Anhang

A.1. Tabellen

In Tab. A.1 werden exemplarisch errechnete RELATIVE FEHLERGRENZEN aufgezeigt, d.h. die Abweichungen der jeweiligen Werte die sich ergeben, wenn:

- die Leiterbreite w mit einer TOLERANZ von $\pm 50\mu m$ **und**
- der Radius r_a mit einer TOLERANZ von $\pm 500\mu m$

um den wahren Wert abweicht. Daraus resultieren dann drei berechnete Beispiele der RELATIVEN FEHLERGRENZEN mit einer Leiterbreite von w für jeweils:

- $w = 0,1$ mm (kleinste hier berechnete Leiterbreite)
- $w = 2,2$ mm (Maximum des Wirkungsgrades)
- $w = 7$ mm (größte hier berechnete Leiterbreite)

Bezeichnung	Symbol	w=0,1 mm	w=2,2 mm	w=7 mm
Antenneninnenfläche	A_i	12 %	14 %	36 %
Strahlungswiderstand	R_{Rad}	21 %	25 %	72 %
Verlustwiderstand	R_{Loss}	27 %	5 %	4 %
Gesamtwiderstand	$R_{Loss} + R_{Rad}$	50 %	10 %	10 %
Ratio	R_{Loss}/R_{Rad}	30 %	10 %	33 %
Wirkungsgrad	η	125 %	40 %	130 %
Induktivität Loop	L_{Loop}	13 %	7 %	8 %
Induktivität Draht	L_{Wire}	5.5 %	6 %	8 %
Gesamtinduktivität	$L_{Loop} + L_{Wire}$	13 %	7.5 %	8 %
Antennengüte	Q	13 %	7.5 %	8 %

Tabelle A.1.: RELATIVE FEHLERGRENZEN für drei versch. Leiterbreiten

Anmerkung: Die Toleranzen des Außenradius r_a und der Leiterbreite w wurden für diese Ausarbeitung absichtlich VIEL ZU GROSS gewählt um in ALLEN Diagrammen IMMER signifikante und somit optisch gut darstellbare Abweichungen zu erzielen.

Zeichen	Wert	Einheit	Beschreibung
μ_0	$1,256637 \cdot 10^{-6}$	H/m	Magnetische Feldkonstante, Permeabilität
σ	$57 \cdot 10^6$	S/m	Elektrische Leitfähigkeit, Konduktivität (Cu)
ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm	Elektrische Feldkonstante, Permittivität
c_0	$299,794580 \cdot 10^6$	m/s	Lichtgeschwindigkeit
Z_0	$3,7673 \cdot 10^2$	Ω	Magnetischer Feldwellenwiderstand

Tabelle A.2.: Physikalische NATURKONSTANTEN

Diese Größen sind für diese Dokumentation als quasi-konstant definiert worden.

Zeichen	Wert	Einheit	Beschreibung
f	434	MHz	Hier verwendete Frequenz
w	1	mm	Hier verwendete stat. Leiterbreite (2D-Plots)
r_a	10	mm	Hier verwendeter stat. Außenradius (2D-Plots)
w	0,1 ... 7	mm	Hier verwendete dyn. Leiterbreite (3D-Plots)
r_a	10 ... 100	mm	Hier verwendeter dyn. Außenradius (3D-Plots)

Tabelle A.3.: Sonstige KONSTANTE WERTE und WERTEBEREICHE

Name der SW	Version	Lizenz	Beschreibung
wxMaxima	15.10.0-unofficial	GCL 2.6.10	GUI für Maxima
Maxima	5.32.1	GCL 2.6.10	Mathematik
Gnuplot	4.6 patchlevel 4	GNU	2D- und 3D-Plotter
LibreOffice 5 Calc	5.0.3.2	MPL 2.0	Tabellenkalkulation
MicroCap 10	10.0.8.2 EV	Spektrum-Software	HW-Simulation
wine	1.6.2	LGPL	Emulator für MicroCap
InkScape	0.91	GNU	Vektorgrafik
Linux Mint	17.3 Rosa	GNU GPLv3	Betriebssystem

Tabelle A.4.: Verwendete SOFTWARE

A.2. Verwendete Gleichungen

Folgende Gleichungen wurden im Rahmen dieser Arbeit verwendet. Insbesondere für die Berechnung der Fehlerfortpflanzung (Fehlergrenzen) werden die STAMMFUNKTIONEN und die daraus entstehenden jeweiligen 1. ABLEITUNGEN benötigt.

STAMMFUNKTION Fläche A_i :

$$\pi (r_a - w)^2$$

1. ABLEITUNG A_i nach w :

$$-2\pi (r_a - w)$$

1. ABLEITUNG A_i nach r_a :

$$2\pi (r_a - w)$$

STAMMFUNKTION Strahlungswiderstand R_{Rad} :

$$\frac{8\pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3c^4}$$

1. ABLEITUNG R_{Rad} nach w :

$$-\frac{32\pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3c^4}$$

1. ABLEITUNG R_{Rad} nach r_a :

$$\frac{32\pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3c^4}$$

STAMMFUNKTION Verlustwiderstand R_{Loss} :

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{w}$$

1. ABLEITUNG R_{Loss} nach w :

$$-\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}}}{w} - \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{w^2}$$

1. ABLEITUNG R_{Loss} nach r_a :

$$\frac{2\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}}}{w}$$

STAMMFUNKTION Gesamtwiderstand R_{Ges} :

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{w} + \frac{8\pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3c^4}$$

1. ABLEITUNG R_{Ges} nach w :

$$-\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}}}{w} - \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{w^2} - \frac{32 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3 c^4}$$

1. ABLEITUNG R_{Ges} nach r_a :

$$\frac{2 \pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}}}{w} + \frac{32 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3 c^4}$$

STAMMFUNKTION Ratio R_{Loss}/R_{Ges} :

$$\frac{3 c^4 \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{8 \pi^{\frac{7}{2}} Z_0 f^4 (r_a - w)^4 w}$$

1. ABLEITUNG R_{Loss}/R_{Ges} nach w :

$$\frac{3 c^4 \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{2 \pi^{\frac{7}{2}} Z_0 f^4 (r_a - w)^5 w} - \frac{3 c^4 \sqrt{\frac{fu}{s}}}{8 \pi^{\frac{7}{2}} Z_0 f^4 (r_a - w)^4 w} - \frac{3 c^4 \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{8 \pi^{\frac{7}{2}} Z_0 f^4 (r_a - w)^4 w^2}$$

1. ABLEITUNG R_{Loss}/R_{Ges} nach r_a :

$$\frac{3 c^4 \sqrt{\frac{fu}{s}}}{4 \pi^{\frac{7}{2}} Z_0 f^4 (r_a - w)^4 w} - \frac{3 c^4 \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{2 \pi^{\frac{7}{2}} Z_0 f^4 (r_a - w)^5 w}$$

STAMMFUNKTION Wirkungsgrad $R_{Rad}/(R_{Loss} + R_{Ges})$:

$$\frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4 \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \right)}$$

1. ABLEITUNG $R_{Rad}/(R_{Loss} + R_{Ges})$ nach w :

$$\frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 \left(-\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}}}{w} - \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{w^2} - \frac{32 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3 c^4} \right) (r_a - w)^4}{3 c^4 \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \right)^2} - \frac{32 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3 c^4 \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{fu}{s}} (2r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \right)}$$

1. ABLEITUNG $R_{Rad}/(R_{Loss} + R_{Ges})$ nach r_a :

$$\frac{32 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3 c^4 \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}} (2 r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \right)} - \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 \left(\frac{2 \pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}}}{w} + \frac{32 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3 c^4} \right) (r_a - w)^4}{3 c^4 \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}} (2 r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \right)^2}$$

STAMMFUNKTION Induktivität Loop-Anteil L_{Loop} :

$$r_a u \log \left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right)$$

1. ABLEITUNG L_{Loop} nach w :

$$-\frac{8 r_a^2 u}{\left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right) w^2}$$

1. Ableitung L_{Loop} nach r_a :

$$\frac{8 r_a u}{\left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right) w} + u \log \left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right)$$

STAMMFUNKTION Induktivität Draht-Anteil L_{Wire} :

$$\frac{u (2 r_a - w)}{8}$$

1. ABLEITUNG L_{Wire} nach w :

$$-\frac{u}{8}$$

1. ABLEITUNG L_{Wire} nach r_a :

$$\frac{u}{4}$$

STAMMFUNKTION Induktivität Loop- und Draht-Anteil L_{Ges} :

$$\frac{u (2 r_a - w)}{8} + r_a u \log \left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right)$$

1. ABLEITUNG L_{Ges} nach w :

$$-\frac{8 r_a^2 u}{\left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right) w^2} - \frac{u}{8}$$

1. ABLEITUNG L_{Ges} nach r_a :

$$\frac{8 r_a u}{\left(\frac{8 r_a}{w} - 2\right) w} + u \log \left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right) + \frac{u}{4}$$

STAMMFUNKTION Gütefaktor Q :

$$\frac{2 \pi f \left(\frac{u(2 r_a - w)}{8} + r_a u \log \left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right) \right)}{\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}} (2 r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4}}$$

1. ABLEITUNG Q nach w :

$$\frac{2 \pi f \left(-\frac{8 r_a^2 u}{\left(\frac{8 r_a}{w} - 2\right) w^2} - \frac{u}{8} \right) - 2 \pi f \left(-\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}}}{w} - \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}} (2 r_a - w)}{w^2} - \frac{32 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3 c^4} \right) \left(\frac{u(2 r_a - w)}{8} + r_a u \log \left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right) \right)}{\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}} (2 r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}} (2 r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \right)^2}$$

1. ABLEITUNG Q nach r_a :

$$\frac{2 \pi f \left(\frac{8 r_a u}{\left(\frac{8 r_a}{w} - 2\right) w} + u \log \left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right) + \frac{u}{4} \right) - 2 \pi f \left(\frac{2 \pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}}}{w} + \frac{32 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^3}{3 c^4} \right) \left(\frac{u(2 r_a - w)}{8} + r_a u \log \left(\frac{8 r_a}{w} - 2 \right) \right)}{\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}} (2 r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{f u}{s}} (2 r_a - w)}{w} + \frac{8 \pi^5 Z_0 f^4 (r_a - w)^4}{3 c^4} \right)^2}$$

A.3. GNU Free Documentation License

DIESES DOKUMENT WURDE UNTER DIE LIZENZ DER 'GNU FREE DOCUMENTATION LICENSE' GESTELLT. DIE VOLLE KOPIE DER LIZENZ IST UNTER [FSF08] ZU FINDEN.

Abkürzungen und Keywords

ESB	Ersatzschaltbild
HF	Hochfrequenz
KW	Kurzwele, Frequenzbereich von 3...30 MHz
ML	Missmatch Loss, Fehlanpassungsdämpfung
NWA	Netzwerk-Analyzer
RL	Return Loss, Rückwärtsdämpfung
UHF	Ultra High Frequency
VSWR	Voltage Standing Wave Ratio, Stehwellenverhältnis

Keywords: Antenna, Matching, Loop, Quality, Stability, Tolerance, 433 MHz, 314 MHz

Literaturverzeichnis

- [BK14] Schutzrecht DE102014106879A1 (Mai 2014). BROZIO, Dieter ; KULIK, Klaus (Erfinder). <https://depatisnet.dpma.de/DepatisNet/depatisnet?action=pdf&docid=DE102014106879A1>
- [Bro15] BROZIO, Dieter: Berechnungen zum internen Antennen-Tuning eines ATMEL SigmaX ATA583x. <http://df5en.darc.de/doc/Berech11internet.pdf>, November 2015
- [BS12] Schutzrecht DE102012107313A1 (August 2012). BROZIO, Dieter ; STICHERLING, Nadine (Erfinder). <https://depatisnet.dpma.de/DepatisNet/depatisnet?action=pdf&docid=DE102012107313A1>
- [EJ03] EVJEN, P. M. ; JONSRUD, G. E.: AN003 SRD Antennas. <http://www.ti.com/lit/an/swra088/swra088.pdf>, March 2003
- [FSF08] FREE SOFTWARE FOUNDATION, Inc.: GNU Free Documentation License. <http://df5en.darc.de/doc/GNU-FDL.pdf>, November 2008
- [Gri15] GRIGOROV, Igor: ANTENTOP (Magazine). <http://antentop.org/contributor/rk3zk.htm>, Februar 2015
- [Jan86] JANZEN, Gerd: Kurze Antennen - Entwurf und Berechnung verkürzter Sende- und Empfangsantennen. I. Frankh'sche Verlagshandlung Stuttgart, 1986
- [LF79] LECHNER, Detlef ; FINCK, Peter: Kurzwellensender. I. Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik, 1979
- [MG92a] MEINKE, H. ; GUNDLACH, F. W.: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik - Band 1 Grundlagen. Bd. 1. V. Springer Verlag, 1992
- [MG92b] MEINKE, H. ; GUNDLACH, F. W.: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik - Band 2 Komponenten. Bd. 2. V. Springer Verlag, 1992
- [MG92c] MEINKE, H. ; GUNDLACH, F. W.: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik - Band 3 Systeme. Bd. 3. V. Springer Verlag, 1992
- [Nik14] NIKOLOVA, Prof. Natalia K.: Lecture 11 Loop Antennas. http://www.ece.mcmaster.ca/faculty/nikolova/antenna_dload/current_lectures/L12_Loop.pdf, November 2014
- [RK13] ROTHAMMEL, Karl ; KRITSCHKE, Alois: Kurzwellensender. XIII. DARC Verlag GmbH, 2013
- [wik16] WIKIPEDIA.DE: Fehlergrenze. https://de.wikipedia.org/wiki/Fehlergrenze#Rechnen_mit_Fehlergrenzen, 1 2016